

Tramos impares en la dinámica semiacelerada de Collatz

Descomposición triangular, identidad de extremos y particiones generadas por el parámetro impar

Miguel Cerdá Bennassar

6 de septiembre de 2026

Resumen

Se estudia la dinámica semiacelerada asociada al problema de Collatz, dada por la transformación $T(n) = n/2$ para n par y $T(n) = (3n + 1)/2$ para n impar. El objetivo es describir exactamente los *tramos impares*: bloques máximos de aplicaciones consecutivas de la regla impar, terminados cuando aparece un valor par. La traslación afín $x \mapsto x + 1$ linealiza la regla impar, convirtiéndola en una multiplicación por $3/2$; de ello se deduce que la longitud de todo tramo que comienza en el impar A es exactamente $\nu_2(A+1)$, junto con la identidad de extremos $3^r(A+1) = 2^r(B+1) = 6^r C$.

El escrito organiza esta información en una *descomposición triangular*: cada tramo queda generado por un único entero impar C , del que descienden dos ramas multiplicativas de igual longitud, una por potencias de 2 hasta $A + 1$ y otra por potencias de 3 hasta $B + 1$. Los enteros situados sobre la rama diádica de todas las familias particionan $\mathbb{N}$, y cada fila del array triangular de una familia es un tramo completo. Se precisa además en qué punto exacto deja de propagarse la linealización al pasar de un tramo al siguiente.

Índice

1. Alcance del escrito	2
2. La transformación semiacelerada	2
3. Tramos impares y linealización afín	2
4. Longitud del tramo y parametrización	4
5. La familia $\Delta(C)$ y la partición de $\mathbb{N}$	5
6. Estructura módulo 4 y descenso estricto	6
7. Valuación 2-ádica y condición de cierre	7
8. Ejemplo: la órbita iniciada en 39	8
9. Concatenación de tramos y ruptura de la linealización	9
10. Distribución de las longitudes de tramo	9
11. Relación con la aplicación acelerada de Syracuse	10
12. Relación con la conjetura de Collatz	10

1. Alcance del escrito

Los ingredientes aritméticos empleados aquí son elementales y forman parte del folclore del problema $3x + 1$: la traslación $x \mapsto x + 1$ que linealiza la rama impar, la identidad de extremos y la lectura de la longitud de racha mediante $\nu_2(A + 1)$ son conocidos, y aparecen bajo diversas formas en Terras [5], Everett [2] y las panorámicas de Lagarias [3, 4] y Wirsching [6]. No se reclama novedad sobre ellos.

Lo que este escrito propone es una organización distinta de esa información. En lugar de describir la órbita como sucesión de términos, se la describe como concatenación de *triángulos*: objetos generados cada uno por un entero impar C situado en el vértice, del que descienden dos ramas de igual longitud, la diádica $C, 2C, 4C, \dots$ y la triádica $C, 3C, 9C, \dots$, y cuya fila r -ésima es exactamente un tramo impar de longitud r trasladado en una unidad. De esta lectura se siguen dos hechos que no suelen enunciarse:

1. Las ramas diádicas de todas las familias $\Delta(C)$, con C impar, *particionan* $\mathbb{N}$ (Proposición 5.3); los puntos de altura $r \geq 1$ son precisamente los $A + 1$ de los tramos de longitud r .
2. Dos tramos alejados en una misma órbita pueden pertenecer a la misma familia, es decir, compartir generador. En la órbita de 39 ocurre con el primer y el tercer tramo, ambos de la familia $C = 5$ (Figura 2).

Se advierte finalmente, en la Sección 12, que la estructura descrita no aporta por sí sola ningún avance hacia la conjetura, y se identifica con precisión el punto en que la linealización deja de propagarse.

2. La transformación semiacelerada

Sea $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_{\geq 1}$ y sea $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la aplicación

$$T(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \equiv 0 \pmod{2}, \\ \frac{3n+1}{2}, & n \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases} \quad (1)$$

Esta dinámica codifica la misma sucesión de transiciones relevantes que la aplicación clásica de Collatz,

$$\text{Col}(n) = \begin{cases} n/2, & n \text{ par}, \\ 3n+1, & n \text{ impar}, \end{cases}$$

omitiendo una de las divisiones por 2 que sigue necesariamente a cada paso impar: un paso impar clásico $n \mapsto 3n + 1$ siempre va seguido, al menos, de una división por 2. La forma (1) incorpora esa primera división directamente.

3. Tramos impares y linealización afín

Definición 3.1 (Tramo impar de longitud r). Sea A un entero impar y sea $r \geq 1$. Diremos que

$$A, T(A), T^2(A), \dots, T^{r-1}(A), B := T^r(A)$$

forma un *tramo impar de longitud* r si

$$T^j(A) \text{ es impar } (0 \leq j \leq r-1), \quad B = T^r(A) \text{ es par.}$$

Es decir, el tramo contiene r aplicaciones consecutivas de la rama impar $x \mapsto (3x+1)/2$, y termina en el primer valor par producido por dicha rama.

Obsérvese que la definición determina r unívocamente a partir de A : es el primer índice en que la órbita abandona el conjunto de los impares. No es, por tanto, un parámetro libre.

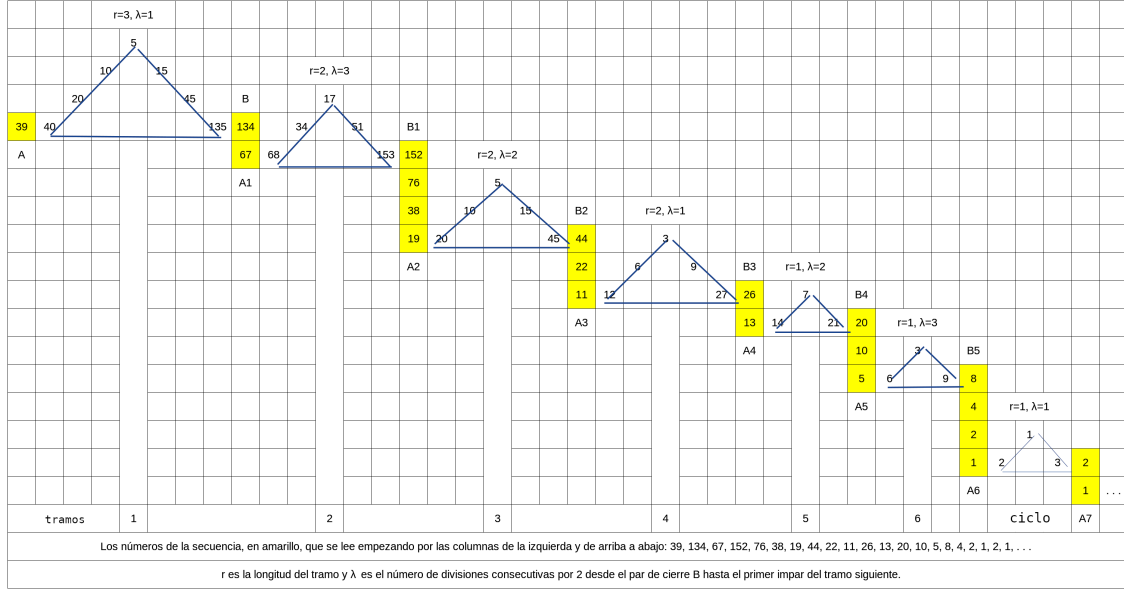


Figura 1: Descomposición de la órbita semiacelerada iniciada en 39 en tramos impares. Los valores resaltados en amarillo son los términos de la sucesión, leídos por columnas de izquierda a derecha y de arriba abajo. Cada triángulo representa un tramo de aplicaciones consecutivas de $x \mapsto (3x+1)/2$. El único vértice es el superior, que aloja el parámetro impar C que genera el tramo; los valores $A+1$ y $B+1$ no son vértices, sino los puntos situados a altura r sobre el lado izquierdo y sobre el lado derecho respectivamente, de modo que el lado izquierdo recorre $C, 2C, 4C, \dots, 2^r C$ y el derecho $C, 3C, 9C, \dots, 3^r C$. La base expresa la relación afín entre los extremos en la coordenada desplazada $x+1$. Para cada tramo, r es su longitud y $\lambda = \nu_2(B)$ el número de divisiones sucesivas por 2 desde el par de cierre B hasta el primer impar del tramo siguiente.

La observación central consiste en trasladar el origen en una unidad.

Lema 3.2 (Linealización mediante $x+1$). *Para todo entero impar x se tiene*

$$T(x) + 1 = \frac{3}{2}(x+1). \quad (2)$$

En particular, si $x, T(x), \dots, T^{r-1}(x)$ son impares, entonces

$$T^r(x) + 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^r (x+1). \quad (3)$$

Demostración. Si x es impar, por definición de T ,

$$T(x) + 1 = \frac{3x+1}{2} + 1 = \frac{3x+3}{2} = \frac{3}{2}(x+1).$$

La fórmula iterada se obtiene aplicando la identidad anterior r veces, mientras la órbita permanezca en la rama impar. $\square$

La variable desplazada $X = x + 1$ convierte, por tanto, la rama impar de la dinámica en la multiplicación racional $X \mapsto \frac{3}{2}X$. Esta es una identidad exacta, no una aproximación asintótica.

4. Longitud del tramo y parametrización

Teorema 4.1 (Estructura completa de un tramo). *Sea A un entero impar y escribáse*

$$A + 1 = 2^s C, \quad s = \nu_2(A + 1), \quad C \text{ impar.}$$

Entonces el tramo impar que comienza en A tiene longitud exactamente

$$r = s = \nu_2(A + 1),$$

y para todo j con $0 \leq j \leq r$ se cumple

$$T^j(A) = 2^{r-j} 3^j C - 1. \quad (4)$$

En particular, sus extremos son

$$A = 2^r C - 1, \quad B := T^r(A) = 3^r C - 1, \quad (5)$$

y el parámetro $C = (A + 1)/2^r$ es impar y está unívocamente determinado por A .

Demostración. Probamos por inducción sobre j , para $0 \leq j \leq s$, que $T^j(A) = 2^{s-j} 3^j C - 1$, y que $T^j(A)$ es impar cuando $j < s$.

Para $j = 0$ la fórmula es $A = 2^s C - 1$, que es la definición de s y C .

Supongamos la fórmula válida para un índice $j < s$. Como $s - j \geq 1$, el producto $2^{s-j} 3^j C$ es par, luego $T^j(A)$ es impar. Por tanto se aplica la rama impar de (1) y

$$T^{j+1}(A) = \frac{3(2^{s-j} 3^j C - 1) + 1}{2} = \frac{2^{s-j} 3^{j+1} C - 2}{2} = 2^{s-j-1} 3^{j+1} C - 1,$$

que es la fórmula para $j + 1$. Esto completa la inducción.

Queda ver que el tramo se cierra exactamente en $j = s$. Para $j < s$ acabamos de comprobar que $T^j(A)$ es impar, luego el tramo tiene longitud al menos s . Y para $j = s$, $T^s(A) = 3^s C - 1$, donde $3^s C$ es impar por serlo C ; por tanto $T^s(A)$ es par y el tramo se cierra ahí. Así $r = s$. La unicidad de C es inmediata de $C = (A + 1)/2^r$. $\square$

Corolario 4.2 (Identidad de extremos). *Con la notación anterior,*

$$\frac{B + 1}{A + 1} = \left(\frac{3}{2}\right)^r, \quad \text{equivalentemente} \quad 3^r(A + 1) = 2^r(B + 1) = 6^r C. \quad (6)$$

Demostración. Basta sustituir (5): $3^r(A + 1) = 3^r 2^r C$ y $2^r(B + 1) = 2^r 3^r C$. $\square$

Observación 4.3 (Alcance preciso). La identidad (6) es válida para cada bloque formado por r aplicaciones consecutivas de la rama impar. No debe afirmarse sin hipótesis para un segmento arbitrario de la órbita que contenga también pasos pares $n \mapsto n/2$.

Observación 4.4 (Por qué C ha de ser impar). Conviene separar dos cuestiones que es fácil confundir. Dados $r \geq 1$ y $C \geq 1$ cualesquiera, la sucesión (4) tiene términos impares para $j < r$, pues son de la forma «par menos uno». Lo que decide el cierre es únicamente el último: $3^r C - 1$ es par si y sólo si C es impar. Si se tomara C par, el término $3^r C - 1$ sería impar y la racha simplemente no habría terminado; es decir, la r elegida no sería la longitud real del tramo. La maximalidad exigida en la Definición 3.1 es, pues, lo que fuerza C impar, y equivale a $r = \nu_2(A + 1)$.

Corolario 4.5 (Caracterización congruencial). *Para $r \geq 1$ fijo, los impares que inician un tramo de longitud exactamente r son exactamente los de la forma $A = 2^r C - 1$ con C impar, es decir*

$$A \equiv 2^r - 1 \pmod{2^{r+1}}. \quad (7)$$

Demostración. C impar equivale a escribir $C = 2q+1$, y entonces $A = 2^r(2q+1)-1 \equiv 2^r-1 \pmod{2^{r+1}}$. Recíprocamente, esa congruencia equivale a $\nu_2(A+1) = r$, que por el Teorema 4.1 es la longitud del tramo. $\square$

5. La familia $\Delta(C)$ y la partición de $\mathbb{N}$

El Teorema 4.1 admite una lectura geométrica que organiza a la vez todos los tramos que comparten parámetro.

Definición 5.1 (Familia triangular de un impar). Sea C un entero impar. Llamamos *familia* o *triángulo* de C al array

$$\Delta(C) = \{ 2^{r-j} 3^j C : r \geq 0, 0 \leq j \leq r \},$$

organizado en filas indexadas por la altura r . El *vértice* es el término de altura 0, es decir C . El *lado izquierdo* o rama diádica está formado por los términos con $j = 0$, esto es $C, 2C, 4C, \dots$; el *lado derecho* o rama triádica por los términos con $j = r$, esto es $C, 3C, 9C, \dots$

Los valores $A+1 = 2^r C$ y $B+1 = 3^r C$ no son vértices: son los puntos situados a altura r sobre cada uno de los dos lados.

Proposición 5.2 (La fila r es un tramo). *Sea C impar y $r \geq 1$. Restando una unidad a cada término de la fila r de $\Delta(C)$ se obtiene exactamente el tramo impar de longitud r que comienza en $A = 2^r C - 1$:*

$$2^r C - 1 \mapsto 2^{r-1} 3C - 1 \mapsto \dots \mapsto 2 \cdot 3^{r-1} C - 1 \mapsto 3^r C - 1. \quad (8)$$

Los r primeros términos son impares y el último es par. Recíprocamente, todo tramo impar se obtiene así, para un único par (C, r) con C impar y $r \geq 1$.

Demostración. Es la fórmula (4) del Teorema 4.1, junto con la unicidad de $C = (A+1)/2^r$ y $r = \nu_2(A+1)$. $\square$

Así, un paso de la rama impar consiste en avanzar una posición hacia la derecha dentro de la fila: se cambia un factor 2 por un factor 3. La razón entre los dos extremos de la fila es $(3/2)^r$, que es (6).

Proposición 5.3 (Partición por ramas diádicas). *Las ramas diádicas de las familias $\Delta(C)$, con C recorriendo los enteros impares, forman una partición de $\mathbb{N}$:*

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{C \text{ impar}} \{ 2^r C : r \geq 0 \}.$$

Además, para $r \geq 1$ el punto de altura r de la rama diádica de $\Delta(C)$ es $A+1$, donde A es el impar inicial de un tramo de longitud exactamente r ; y todo inicio de tramo se obtiene de este modo una sola vez.

Demostración. Todo $n \in \mathbb{N}$ se escribe de forma única como $n = 2^v u$ con $v = \nu_2(n)$ y u impar, de modo que n pertenece a la rama diádica de $\Delta(u)$ a altura v , y sólo a ella. La segunda afirmación es el Corolario 4.5 combinado con el Teorema 4.1: si A es impar, entonces $A+1 = 2^r C$ con $r = \nu_2(A+1)$ y C impar, y el tramo que arranca en A tiene longitud exactamente r . $\square$

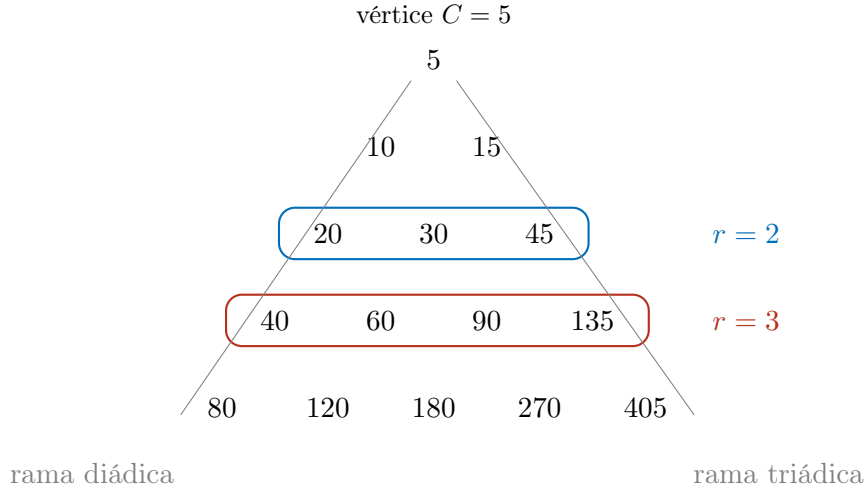


Figura 2: La familia $\Delta(5)$ hasta la altura 4. El vértice es $C = 5$; la rama diádica desciende por la izquierda $(5, 10, 20, 40, 80)$ y la triádica por la derecha $(5, 15, 45, 135, 405)$. Restando una unidad a cada término, la fila r es un tramo impar de longitud r : la fila 2 da $19 \rightarrow 29 \rightarrow 44$ y la fila 3 da $39 \rightarrow 59 \rightarrow 89 \rightarrow 134$, que son respectivamente el tercer y el primer tramo de la órbita de 39. Pese a estar separados en la órbita, comparten generador. Las filas de un mismo triángulo no son consecutivas en la dinámica: el descenso de una fila a la siguiente no es un paso de T .

La partición es, literalmente, la descomposición 2-ádica de $\mathbb{N}$ leída como abanico de triángulos. Su interés aquí es que traduce una propiedad puramente aritmética en una clasificación de los tramos: dos tramos pertenecen a la misma familia si y sólo si el impar que queda tras despojar a $A + 1$ de toda su potencia de 2 es el mismo.

Observación 5.4 (Las filas no son consecutivas en la órbita). La familia $\Delta(C)$ agrupa tramos que comparten generador, no tramos encadenados. En la Figura 2, las filas 2 y 3 de $\Delta(5)$ dan los tramos $19 \rightarrow 29 \rightarrow 44$ y $39 \rightarrow 59 \rightarrow 89 \rightarrow 134$, que en la órbita de 39 ocupan las posiciones tercera y primera respectivamente, sin relación dinámica entre sí. En particular, el paso de una fila a la siguiente no corresponde a ninguna aplicación de T . La familia es una clase de la partición de la Proposición 5.3, no una órbita.

Observación 5.5 (Solapamiento de los interiores). La partición de la Proposición 5.3 concierne a las ramas diádicas, no a los arrays completos. Los interiores de dos familias pueden cortarse, y lo hacen exactamente cuando $3 \mid C$: por ejemplo, $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ está en la fila 2 de $\Delta(3)$ y también, como $18 = 2 \cdot 3^2 \cdot 1$, en la fila 3 de $\Delta(1)$.

Esto no produce ninguna ambigüedad dinámica. Las dos filas en cuestión son

$$12, 18, 27 \rightarrow 11 \rightarrow 17 \rightarrow 26, \quad 8, 12, 18, 27 \rightarrow 7 \rightarrow 11 \rightarrow 17 \rightarrow 26,$$

y la segunda es la primera precedida de un término más. Un entero que aparece en dos familias es interior de un tramo y de otro más largo que lo contiene como sufixo; su imagen por T es la misma en ambos, pues T es una función. El fenómeno es el de los prefijos encajados: un mismo par de cierre admite varios arranques, y sólo el arranque, vía $r = \nu_2(A + 1)$, determina el tramo maximal.

6. Estructura módulo 4 y descenso estricto

Corolario 6.1 (Perfil módulo 4 de un tramo). *Sea un tramo impar de longitud r que comienza en A . Entonces*

$$T^j(A) \equiv 3 \pmod{4} \quad (0 \leq j \leq r - 2), \quad T^{r-1}(A) \equiv 1 \pmod{4}.$$

Es decir, un tramo consta de $r - 1$ términos de la clase $4m + 3$ seguidos de exactamente uno de la clase $4m + 1$, tras el cual se produce el cierre par.

Demostración. Por (4), $T^j(A) = 2^{r-j}3^jC - 1$. Si $r - j \geq 2$ entonces $4 \mid 2^{r-j}3^jC$, luego $T^j(A) \equiv -1 \equiv 3 \pmod{4}$. Si $j = r - 1$, el término es $2 \cdot 3^{r-1}C - 1$ con $3^{r-1}C$ impar, de modo que $2 \cdot 3^{r-1}C \equiv 2 \pmod{4}$ y $T^{r-1}(A) \equiv 1 \pmod{4}$. $\square$

Proposición 6.2 (Descenso estricto de la valuación). *Sea x impar.*

1. Si $x \equiv 3 \pmod{4}$, entonces $T(x)$ es impar y

$$\nu_2(T(x) + 1) = \nu_2(x + 1) - 1. \quad (9)$$

2. Si $x \equiv 1 \pmod{4}$, entonces $T(x)$ es par y $\nu_2(x + 1) = 1$.

En consecuencia, todo impar $x \equiv 3 \pmod{4}$ alcanza la clase $4m + 1$ tras exactamente $\nu_2(x + 1) - 1$ aplicaciones de T , todas ellas impares.

Demostración. Si $x \equiv 3 \pmod{4}$ entonces $\nu_2(x + 1) \geq 2$, luego por el Teorema 4.1 el tramo que comienza en x tiene longitud $r \geq 2$ y $T(x)$ es impar. Por el Lema 3.2, $T(x) + 1 = \frac{3}{2}(x + 1)$; como 3 es impar, $\nu_2(T(x) + 1) = \nu_2(x + 1) - 1$, que es (9).

Si $x \equiv 1 \pmod{4}$ entonces $\nu_2(x + 1) = 1$, el tramo tiene longitud $r = 1$ y $T(x) = B$ es par.

La afirmación final se sigue iterando (9): la cantidad $\nu_2(x + 1)$, entero positivo, decrece exactamente en una unidad en cada paso mientras el término siga en la clase $4m + 3$, y el valor 1 caracteriza la clase $4m + 1$. $\square$

En el lenguaje de la Sección 5, la Proposición 6.2 dice que recorrer un tramo equivale a subir por la rama diádica de la familia: la altura del punto $x + 1$ sobre esa rama disminuye en uno a cada paso, y el tramo se cierra al alcanzar la altura 1.

7. Valuación 2-ádica y condición de cierre

Definición 7.1 (Valuación 2-ádica). Para un entero no nulo m , la valuación 2-ádica $\nu_2(m)$ es el único entero $e \geq 0$ tal que $m = 2^e u$ con u impar. Equivale a la mayor potencia de 2 que divide a m : $\nu_2(m) = \max\{e \geq 0 : 2^e \mid m\}$.

Para x impar se cumple $3x + 1 = 2T(x)$ y, en consecuencia,

$$\nu_2(3x + 1) = 1 + \nu_2(T(x)). \quad (10)$$

Esto traduce la paridad de la imagen de x en una condición de valuación:

$$T(x) \text{ es impar} \iff \nu_2(3x + 1) = 1 \iff x \equiv 3 \pmod{4}, \quad (11)$$

$$T(x) \text{ es par} \iff \nu_2(3x + 1) \geq 2 \iff x \equiv 1 \pmod{4}. \quad (12)$$

Proposición 7.2 (Perfil de valuaciones en un tramo). *Sea*

$$A, T(A), \dots, T^{r-1}(A), B = T^r(A)$$

un tramo impar de longitud r , con parámetro C . Entonces

$$\nu_2(3T^j(A) + 1) = 1 \quad (0 \leq j \leq r - 2), \quad (13)$$

y

$$\nu_2(3T^{r-1}(A) + 1) = 1 + \nu_2(B) = 1 + \nu_2(3^r C - 1) \geq 2. \quad (14)$$

Demostración. Para $0 \leq j \leq r-2$, los dos términos $T^j(A)$ y $T^{j+1}(A)$ son impares; por (10), $\nu_2(3T^j(A) + 1) = 1 + \nu_2(T^{j+1}(A)) = 1$. En el último paso, $B = T^r(A)$ es par, luego de nuevo por (10), $\nu_2(3T^{r-1}(A) + 1) = 1 + \nu_2(B) \geq 2$. Finalmente $B = 3^r C - 1$ por (5). $\square$

Corolario 7.3 (Exponente del par de cierre). *Sea un tramo impar con par de cierre B , y sea A' el primer impar obtenido tras dividir sucesivamente B por 2; es decir, A' es el impar inicial del tramo siguiente. Definimos $\lambda := \nu_2(B)$. Entonces $B = 2^\lambda A'$ con A' impar, y λ es exactamente el número de divisiones consecutivas por 2 que llevan de B a A' . Si $L := T^{r-1}(A)$ es el último impar del tramo, entonces $3L + 1 = 2B$ y por tanto*

$$\nu_2(3L + 1) = 1 + \nu_2(B) = \lambda + 1.$$

8. Ejemplo: la órbita iniciada en 39

Considérese el comienzo de la órbita bajo T :

$$39, 59, 89, 134, 67, 101, 152, 76, 38, 19, 29, 44, \\ 22, 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1, \dots$$

Primer tramo: $39 \rightarrow 59 \rightarrow 89 \rightarrow 134$

Aquí $A = 39$. Como $A + 1 = 40 = 2^3 \cdot 5$, el Teorema 4.1 da directamente $r = \nu_2(40) = 3$ y $C = 5$, sin necesidad de iterar. El par de cierre es $B = 3^3 \cdot 5 - 1 = 134$, y

$$\frac{B+1}{A+1} = \frac{135}{40} = \left(\frac{3}{2}\right)^3, \quad 3^3 \cdot 40 = 2^3 \cdot 135 = 6^3 \cdot 5 = 1080.$$

Los términos internos son la fila 3 de $\Delta(5)$ menos una unidad:

$$2^3 \cdot 5 - 1 = 39, \quad 2^2 \cdot 3 \cdot 5 - 1 = 59, \quad 2 \cdot 3^2 \cdot 5 - 1 = 89, \quad 3^3 \cdot 5 - 1 = 134.$$

El perfil módulo 4 del Corolario 6.1 se verifica: $39 \equiv 3$, $59 \equiv 3$, $89 \equiv 1$ (mód 4); y el descenso de la Proposición 6.2: $\nu_2(40) = 3$, $\nu_2(60) = 2$, $\nu_2(90) = 1$. El perfil de valuaciones durante la racha impar es

$$3 \cdot 39 + 1 = 118 = 2 \cdot 59, \quad \nu_2 = 1; \quad 3 \cdot 59 + 1 = 178 = 2 \cdot 89, \quad \nu_2 = 1;$$

y en el paso de cierre, $3 \cdot 89 + 1 = 268 = 2^2 \cdot 67$. Como $\lambda = \nu_2(134) = 1$, hay una única división posterior, $134 \mapsto 67$, y en efecto $\nu_2(3 \cdot 89 + 1) = 2 = 1 + \lambda$. El rótulo del tramo es $(r, \lambda) = (3, 1)$.

Segundo tramo: $67 \rightarrow 101 \rightarrow 152$

Ahora $A = 67$ y $A + 1 = 68 = 2^2 \cdot 17$, luego $r = 2$ y $C = 17$. El cierre es $B = 3^2 \cdot 17 - 1 = 152$, y

$$9 \cdot 68 = 4 \cdot 153 = 6^2 \cdot 17 = 612.$$

Los términos son $2^2 \cdot 17 - 1 = 67$, $2 \cdot 3 \cdot 17 - 1 = 101$ y $3^2 \cdot 17 - 1 = 152$; módulo 4: $67 \equiv 3$, $101 \equiv 1$. Aquí $3 \cdot 101 + 1 = 304 = 2^4 \cdot 19$, mientras que $\lambda = \nu_2(152) = 3$, de acuerdo con el Corolario 7.3. La cadena par es $152 \mapsto 76 \mapsto 38 \mapsto 19$, y el rótulo es $(r, \lambda) = (2, 3)$.

Los tramos y sus familias

Los rótulos sucesivos de la órbita de 39 son

$$(3, 1), (2, 3), (2, 2), (2, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 1),$$

correspondientes a los impares iniciales 39, 67, 19, 11, 13, 5, 1 y a los parámetros

$$C = 5, 17, 5, 3, 7, 3, 1.$$

Obsérvese que la familia $\Delta(5)$ aparece dos veces, en los tramos primero y tercero, y la familia $\Delta(3)$ otras dos, en los tramos cuarto y sexto. La Figura 2 muestra el primer caso: los dos tramos son las filas 3 y 2 de un mismo triángulo. Nada en la órbita sugiere ese parentesco; sólo la descomposición triangular lo hace visible.

9. Concatenación de tramos y ruptura de la linealización

Proposición 9.1 (Aplicación inducida entre tramos). *Sea un tramo de parámetros (r, C) , con $A = 2^r C - 1$ y $B = 3^r C - 1$, y sea $\lambda = \nu_2(B)$. El impar inicial del tramo siguiente es $A' = B/2^\lambda$, y sus parámetros son $r' = \nu_2(A' + 1)$ y $C' = (A' + 1)/2^{r'}$. Explícitamente,*

$$A' + 1 = \frac{3^r C - 1 + 2^\lambda}{2^\lambda}. \quad (15)$$

Demostración. Inmediato del Corolario 7.3 y del Teorema 4.1 aplicado a A' : basta sumar 1 a $A' = B/2^\lambda$ y poner $B = 3^r C - 1$. $\square$

Observación 9.2 (Dónde deja de valer la linealización). La coordenada desplazada $X = x+1$ se multiplica exactamente por $(3/2)^r$ a lo largo de la racha impar. En cambio, la cola par no actúa sobre X por multiplicación: el término $-1 + 2^\lambda$ del numerador de (15) mide precisamente el defecto.

En el lenguaje triangular: la fila de un triángulo se recorre entera de izquierda a derecha, pero al llegar al lado derecho la dinámica *sale* de la familia y aterriza en el vértice de otra, y la aplicación $C \mapsto C'$ que efectúa ese salto no es multiplicativa. Ésta es la razón estructural, y no meramente técnica, por la que la identidad de tramos no se propaga a lo largo de la órbita completa. Toda la información sobre el encadenamiento está concentrada en la sucesión de exponentes $\lambda_i = \nu_2(3^{r_i} C_i - 1)$, cuya distribución es el verdadero objeto desconocido.

10. Distribución de las longitudes de tramo

Proposición 10.1 (Densidad de las longitudes). *Para cada $k \geq 1$, la densidad natural, dentro del conjunto de los enteros impares, de aquellos que inician un tramo de longitud exactamente k es 2^{-k} . En particular $\sum_{k \geq 1} 2^{-k} = 1$ y la longitud media de tramo, respecto de esta densidad, vale $\sum_{k \geq 1} k 2^{-k} = 2$.*

Demostración. Por el Corolario 4.5, la condición es $A \equiv 2^k - 1 \pmod{2^{k+1}}$. Entre los 2^k residuos impares módulo 2^{k+1} hay exactamente uno que la satisface, de donde la densidad 2^{-k} dentro de los impares. $\square$

En términos de la Proposición 5.3, este cálculo no es más que la observación de que la altura k de la rama diádica ocupa una fracción 2^{-k} de $\mathbb{N}$: la densidad de las longitudes de tramo es la densidad de las alturas en el abanico de familias.

Observación 10.2 (Alcance heurístico). La Proposición 10.1 es un enunciado sobre densidades en $\mathbb{N}$, no sobre órbitas. Suponer además que los parámetros (r_i, λ_i) de tramos sucesivos de una misma órbita se comportan como variables independientes con esa ley conduce a las heurísticas de deriva habituales, según las cuales el factor multiplicativo medio por paso de T es $\sqrt{3}/2 < 1$. Tal suposición de independencia no está demostrada y no se emplea en ningún resultado de este escrito.

11. Relación con la aplicación acelerada de Syracuse

La aceleración usual de Syracuse se define sobre los impares por

$$S(x) = \frac{3x + 1}{2^{\nu_2(3x+1)}}. \quad (16)$$

Es decir, después de aplicar $3x + 1$ se eliminan todas las potencias de 2 y se llega directamente al siguiente impar.

Los tramos descomponen la órbita semiacelerada en dos mecanismos:

- (i) una racha de $r = \nu_2(A + 1)$ transformaciones impares, que recorre la fila r de la familia $\Delta(C)$ y durante la cual la coordenada $x + 1$ se multiplica exactamente por $3/2$ en cada paso;
- (ii) una cola de $\lambda = \nu_2(B)$ divisiones ordinarias por 2, iniciada en el par de cierre $B = 3^r C - 1$.

La valuación $\nu_2(3x + 1)$ determina ambos fenómenos localmente. Para un impar x , si $\nu_2(3x + 1) = 1$ (equivalentemente $x \equiv 3 \pmod{4}$) la aplicación semiacelerada deja un impar y la racha continúa; si $\nu_2(3x + 1) = a \geq 2$ (equivalentemente $x \equiv 1 \pmod{4}$), entonces el primer valor semiacelerado es divisible por 2^{a-1} y no por 2^a , y la racha se interrumpe. La aplicación S salta directamente al impar obtenido tras esas a divisiones totales.

12. Relación con la conjetura de Collatz

La conjetura de Collatz afirma que toda órbita positiva de la aplicación clásica Col alcanza finalmente el ciclo trivial $1 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$. De forma equivalente, toda órbita positiva de la aplicación semiacelerada T alcanza el ciclo $1 \mapsto 2 \mapsto 1$.

La descripción por tramos proporciona una estructura exacta local, pero no constituye por sí misma una demostración de la conjetura. Conviene ser explícito sobre lo poco que se sigue de ella.

Observación 12.1 (Ausencia de periodicidad dentro de una racha impar). No existen $A \geq 1$ y $r \geq 1$ tales que $T^j(A)$ sea impar para $0 \leq j < r$ y $T^r(A) = A$. En efecto, el Lema 3.2 daría $A + 1 = (3/2)^r(A + 1)$, y como $A + 1 > 0$ se seguiría $3^r = 2^r$, imposible. Su contenido es mínimo: excluye únicamente ciclos contenidos *enteramente* dentro de una fila de un triángulo, lo cual es trivial, ya que la fila es finita por construcción.

Un posible ciclo no trivial de Collatz contendría necesariamente pasos pares $n \mapsto n/2$, y dichos pasos no conservan la linealización $x + 1 \mapsto (3/2)(x + 1)$, como precisa la Observación 9.2. Por tanto la identidad de los tramos no excluye ciclos mixtos ni órbitas divergentes.

Observación 12.2 (Qué no se sigue de la descomposición triangular). La conjetura equivale a la conjunción de dos afirmaciones independientes:

- (a) no existen órbitas positivas no acotadas;
- (b) no existen ciclos no triviales.

La descomposición en tramos y familias no establece ninguna de las dos, ni reduce una a la otra.

Merece señalarse en particular que el solapamiento de interiores descrito en la Observación 5.5 no guarda relación alguna con la existencia de ciclos. Que un entero pertenezca a dos familias significa que es interior de dos tramos, uno sufixo del otro; su imagen por T es la misma en ambos, pues T es una función, y las dos filas coinciden desde ese entero en adelante. Tener varios antecesores es un fenómeno ubicuo en la dinámica de Collatz y no produce periodicidad. Recíprocamente, un argumento que pretenda deducir (b) del determinismo de T junto con la unicidad de la descomposición en tramos es circular: la repetición de un tramo dentro de una órbita *es* la definición de periodicidad.

La dificultad global permanece en comprender cómo se encadenan los parámetros (r_i, C_i) de tramos sucesivos mediante (15) y, en particular, cómo las valuaciones $\nu_2(3^r C - 1)$ gobiernan las colas pares. La aceleración de Syracuse (16) concentra precisamente esa información en una sola transición entre impares.

Observación 12.3 (Verificación computacional). La convergencia ha sido verificada computacionalmente para todo $n < 2^{71}$ [1], lo cual apoya la conjetura pero no la demuestra.

13. Resumen estructural

Para un entero impar A , sea $r = \nu_2(A + 1)$ y $C = (A + 1)/2^r$, necesariamente impar. Entonces:

- El tramo impar que comienza en A tiene longitud exactamente r y es la fila r de la familia $\Delta(C)$, disminuida en una unidad:

$$2^r C - 1 \mapsto 2^{r-1} 3C - 1 \mapsto \dots \mapsto 3^r C - 1.$$

- Los $r - 1$ primeros términos están en la clase $4m + 3$, el r -ésimo en la clase $4m + 1$, y el último es par.
- Los extremos verifican $\frac{B + 1}{A + 1} = \left(\frac{3}{2}\right)^r$, es decir $3^r(A + 1) = 2^r(B + 1) = 6^r C$.
- Las ramas diádicas de las familias $\Delta(C)$, con C impar, particionan $\mathbb{N}$; los puntos de altura r son los $A + 1$ de los tramos de longitud r .
- El perfil de valuaciones es $\nu_2(3T^j(A) + 1) = 1$ para $0 \leq j \leq r - 2$, y $\nu_2(3T^{r-1}(A) + 1) = 1 + \nu_2(3^r C - 1) \geq 2$.
- El enlace con el tramo siguiente viene dado por $A' + 1 = (3^r C - 1 + 2^\lambda)/2^\lambda$ con $\lambda = \nu_2(B)$, y esa aplicación no es multiplicativa.

Los triángulos asociados a la órbita no representan, pues, ciclos, sino tramos afines exactos, cada uno generado por un único entero impar. Su geometría aritmética está determinada por la traslación $x \mapsto x + 1$, las dos ramas multiplicativas de razones 2 y 3 que descienden del vértice, y la estructura 2-ádica de los puntos de cierre. La dinámica global no queda determinada por ella.

Referencias

- [1] D. Bařina, *Improved verification limit for the convergence of the Collatz conjecture*, J. Supercomput. **81** (2025), no. 1, 1–14. DOI: 10.1007/s11227-025-07337-0.

- [2] C. J. Everett, *Iteration of the number-theoretic function $f(2n) = n$, $f(2n+1) = 3n+2$* , Adv. Math. **25** (1977), 42–45.
- [3] J. C. Lagarias, *The $3x+1$ problem and its generalizations*, Amer. Math. Monthly **92** (1985), 3–23.
- [4] J. C. Lagarias (ed.), *The Ultimate Challenge: The $3x+1$ Problem*, American Mathematical Society, Providence, 2010.
- [5] R. Terras, *A stopping time problem on the positive integers*, Acta Arith. **30** (1976), 241–252. DOI: 10.4064/aa-30-3-241-252.
- [6] G. J. Wirsching, *The Dynamical System Generated by the $3n+1$ Function*, Lecture Notes in Mathematics **1681**, Springer, Berlin, 1998.