

UNA OBRA DE TEATRO EN UNA TABLA DE NÚMEROS

La pregunta que me he hecho muchas veces es si Lothar Collatz encontró la fórmula del algoritmo de su conjetura persiguiendo el resultado. Siempre he pensado que no y que se encontró con ella de forma casual, sin buscar el resultado que descubrió, de lo contrario él mismo nos hubiese dado la demostración del problema.

Vamos a crear el escenario donde se representarán las impredecibles secuencias y poder disfrutar del espectáculo. Como toda obra de teatro, no entenderíamos el guion sin ver su representación.

El decorado de la escena es éste:

Una tabla cuadrangular con filas y columnas en la que se escriben números hasta llegar al más alto de la secuencia. Con cada secuencia diferente se cambia el decorado y se adapta la cantidad de números escritos al número más alto de cada una.

Los números se escriben ordenadamente, de forma que los impares queden en la primera fila y los demás números debajo del que es su mitad. Escribimos los números ordenadamente desde el 1 hasta el más alto de la secuencia, no por filas ni columnas.

Entra en escena la secuencia empezada con el número 11:

11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	...
2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	...															
4	12	20	28	36	44	52	60	...																						
8	24	40	56	...																										
16	48	...																												
32	...																													
...																														

Los protagonistas de la obra en la formación de una secuencia con la aplicación del algoritmo, son los números naturales, pares e impares y las operaciones a que son sometidos son la multiplicación, la suma y la división.

Esta es la representación de la secuencia que resulta de aplicar las operaciones del algoritmo siguiendo estrictamente su enunciado con estas dos operaciones: Si el número m es impar hacer $3*m+1$ y si el número es par hacer $m/2$ las veces necesarias hasta llegar a un número impar, con el que se repite el proceso.

Pero yo la voy a desarrollar y representar en la tabla aplicando a los números tres operaciones y no dos: Si el número m es impar, la primera operación es $3*m$. La segunda operación es sumar 1 a $3*m$. Si el número es par, $m/2$ las veces que se pueda.

La misma secuencia empezada con el número 11:

11, 33, 34, 17, 51, 52, 26, 13, 39, 40, 20, 10, 5, 15, 16, 8, 4, 2, 1.

Visualmente la diferencia entre la secuencia obtenida con dos operaciones y la obtenida con tres operaciones es notoria:

En cambio los otros lo disminuyen en mayor proporción, desde $(2n-1)-(3n-1)/2=(n-1)/2$, $(2n-1)-(3n-1)/4=(5n-3)/4$, $(2n-1)-(3n-1)/8=(13n-7)/8$, $\dots \infty$ y como que la duración de la obra no importa, más pronto o más tarde, la secuencia se encontrará con números pares de las filas inferiores que la llevará al número 1 y se cerrará el telón.

El escenario donde podemos ver el desarrollo de la secuencia y conocer el guión, es la tabla formada con los números naturales que sean necesarios, según los números que alcance la secuencia.

m	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	...					
2m	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78	82	86	...																										
4m	4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	...																																					
8m	8	24	40	56	72	...																																											
16m	16	48	80	...																																													
32m	32	...																																															
64m	64	...																																															
...	...																																																

Los números señalados en color rojo son los que resultan de multiplicar por 3 a los números impares. Los números señalados en amarillo son los números que resultan de sumar 1 a los impares múltiplos de 3.

La mayor cantidad de pares $6n-2$ se concentran en la columna del impar 1 con tres números. En segundo lugar la columna del 5 con dos números. Con un número cada una las columnas del 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 35 y 41.

En la formación de la secuencia con las operaciones del algoritmo, cuando se multiplica por 3 a un impar y se suma 1, resulta un número par que es: $3(2n-1)+1=6n-2$
En la formación de la secuencia, cuando se dividen entre 2 las veces que se pueda a los números pares $6n-2$, resultan números impares que son mayores o menores que su impar anterior, dependiendo de la fila que ocupan:

Primera fila de los números pares (segunda de la tabla): Los impares resultan mayores que el anterior porque $(6n-2)/2=3n-1, > 2n-1$ La secuencia es ascendente en ese punto.

Segunda fila de los números pares (tercera de la tabla): Los impares resultan menores que el anterior porque $(6n-2)/4=(3n-1)/2, < 2n-1$ La secuencia es descendente en ese punto.

Tercera fila de los números pares (cuarta de la tabla): Los impares resultan menores que el anterior porque $(6n-2)/8=(3n-1)/4, < 2n-1$ La secuencia es descendente en ese punto.

Cuarta fila de los números pares (quinta de la tabla): Los impares resultan menores que el anterior porque $(6n-2)/16=(3n-1)/8, < 2n-1$ La secuencia es descendente en ese punto.

Quinta fila de los números pares (sexta de la tabla): Los impares resultan menores que el anterior porque $(6n-2)/32=(3n-1)/16, < 2n-1$ La secuencia es descendente en ese punto.

Sexta fila de los números pares (séptima de la tabla): Los impares resultan menores que el anterior porque $(6n-2)/64=(3n-1)/32, < 2n-1$ La secuencia es descendente en ese punto.

Así continúa al infinito.