

Dos mecanismos de reducción en dinámicas asociadas a $3/2$: módulo 1 en Mahler y valoración 2-ádica en Collatz

Nota exploratoria

Miguel Cerdá Bennassar
ORCID: 0000-0001-8360-1933

Julio de 2026 (revisada en octubre de 2026)

Resumen

El problema $3/2$ de Mahler y la conjetura de Collatz están relacionados desde 1968, cuando Mahler introdujo la función $M(n) = \lceil 3n/2 \rceil$ para estudiar la existencia de números Z . Esta nota no establece ninguna equivalencia entre ambos problemas. Propone una comparación más modesta, que no hemos encontrado formulada explícitamente en la literatura consultada, entre los *mecanismos de reducción* con que cada uno controla una dinámica de factor básico $3/2$.

En Mahler la reducción es *aditiva y externa*: se resta la parte entera de $\xi(3/2)^k$, es decir, se proyecta sobre $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. En el nivel entero, M y la aplicación abreviada de Collatz coinciden en la rama impar y difieren solo en la par ($3n/2$ frente a $n/2$). En Collatz la reducción es *multiplicativa y endógena*: al entero $3n+1$ se le aplica $x \mapsto x/2^{\nu_2(x)}$, con $\nu_2(3n+1)$ determinada por la estructura 2-ádica de n .

Recordamos, en la forma adaptada a la sucesión de impares, que en densidad las valoraciones sucesivas de una órbita son *exactamente* independientes y geométricas en ventanas iniciales. En consecuencia, ninguna estadística que dependa únicamente de una ventana inicial de longitud fija puede distinguir, en distribución de densidad sobre los impares iniciales, la dinámica de Collatz de ese modelo independiente. Proponemos un primer experimento numérico con estadísticas de órbita completa, que quedan fuera de ese alcance.

Índice

1	Motivación y estado de la cuestión	2
2	Dos mecanismos de reducción	3
3	Hacia una comparación cuantitativa	4
3.1	Las variables naturales	4
3.2	Independencia exacta en ventanas iniciales	5

3.3 El problema	6
3.4 Crecimiento logarítmico de la órbita	7
4 Conclusión	8

1 Motivación y estado de la cuestión

La relación entre el problema de Mahler y la conjetura de Collatz es conocida desde el origen mismo del primero. Mahler [7] consideró la función

$$M(n) = \begin{cases} \frac{3n}{2} & \text{si } n \equiv 0 \pmod{2}, \\ \frac{3n+1}{2} & \text{si } n \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases} \quad \text{es decir,} \quad M(n) = \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil,$$

y relacionó el comportamiento de sus órbitas con la existencia de *números* Z : números reales $\xi > 0$ tales que $\{\xi(3/2)^k\} < 1/2$ para todo $k \geq 0$, donde $\{\cdot\}$ denota la parte fraccionaria. Mahler probó que hay a lo sumo un número Z en cada intervalo $[n, n+1)$, de modo que el conjunto de números Z es a lo sumo numerable; obtuvo además una cota cuantitativa, según la cual, para x suficientemente grande, hay a lo sumo $x^{0.7}$ números Z menores o iguales que x , cota que Flatto [2] mejoró después a $O(x^{0.59})$. Mahler conjeturó que no existe ninguno. El vínculo preciso con M se recoge en el Lema 3.

Lagarias [5] situó el problema $3x+1$ en relación con la aproximación diofántica de $\log_2 3$ y con el problema de Mahler. Flatto, Lagarias y Pollington [3] estudiaron la cantidad

$$\Omega(\alpha) = \inf_{\theta > 0} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{\theta \alpha^n\} - \liminf_{n \rightarrow \infty} \{\theta \alpha^n\} \right),$$

probaron que $\Omega(p/q) \geq 1/p$ para $p/q > 1$ racional en términos mínimos (en particular $\Omega(3/2) \geq 1/3$) y observaron que la conjetura de Mahler se seguiría de $\Omega(3/2) > 1/2$. Akiyama, Frougny y Sakarovitch [1] obtuvieron nuevos resultados sobre este problema mediante sistemas de numeración en base racional p/q , cuya dinámica entera subyacente es precisamente del tipo $n \mapsto \lceil 3n/2 \rceil$.

Por su parte, Terras [8] demostró que el conjunto de enteros con *stopping time* finito tiene densidad 1. Su análisis descansa en la equidistribución de los vectores de paridad de la órbita, y la condición de descenso compara la proporción de pasos impares con $1/\log_2 3$. Ligado a ese resultado, aunque no idéntico a él, hay un conteo elemental de clases residuales. Definiendo la densidad relativa entre los impares como

$$\text{dens}_{\text{impar}}(A) := \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\#(A \cap [1, X])}{\#\{n \leq X : n \text{ impar}\}},$$

dicho conteo muestra que

$$\text{dens}_{\text{impar}}\{n : \nu_2(3n+1) = j\} = 2^{-j}, \quad j \geq 1,$$

porque, entre los impares, la condición $\nu_2(3n+1) = j$ selecciona exactamente una clase residual módulo 2^{j+1} , de las 2^j clases impares que hay módulo ese mismo módulo. La Proposición 7 extiende este conteo a bloques de valoraciones consecutivas. La ley geométrica resultante es la base de los modelos estocásticos del problema $3x+1$ [6, 4].

Este trasfondo es sólido y anterior a esta nota. Lo que *no* hemos encontrado en la literatura consultada es una comparación explícita, a nivel de *mecanismo*, entre las reducciones presentes en ambas dinámicas. Esa comparación es el objeto de esta nota.

2 Dos mecanismos de reducción

Definición 1 (Reducción externa, Mahler). *Fijado $\xi \in \mathbb{R}_{>0}$, la órbita $\xi, \xi \cdot \frac{3}{2}, \xi \cdot (\frac{3}{2})^2, \dots$ se controla mediante la parte fraccionaria*

$$\left\{ \xi \left(\frac{3}{2} \right)^k \right\} = \xi \left(\frac{3}{2} \right)^k - \left\lfloor \xi \left(\frac{3}{2} \right)^k \right\rfloor,$$

que es el objeto que efectivamente estudia Mahler [7]. Esta operación resta la parte entera del propio valor real: es la proyección asociada a la relación de equivalencia aditiva módulo 1,

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z},$$

sobre $\mathbb{R}$. La llamamos reducción externa porque la cantidad que se resta en el paso k depende únicamente del valor real $\xi(3/2)^k$, y no de ninguna propiedad aritmética discreta que el mecanismo “perciba” internamente.

Observación 2. *Conviene distinguir esta reducción de la identificación de octavas, es decir, la relación $x \sim 2^j x$ (equivalentemente, $\log_2 x \pmod{1}$), sobre $\mathbb{R}_{>0}/2^{\mathbb{Z}}$. Es la que interviene, por ejemplo, en la construcción pitagórica de la escala por quintas, que lleva cada potencia de $3/2$ al intervalo de octava $[1, 2)$. Son dos cocientes distintos: el problema de Mahler vive en $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, no en $\mathbb{R}_{>0}/2^{\mathbb{Z}}$, y esta nota no los identifica.*

La reducción módulo 1 tiene una traducción exacta en el nivel entero, que es la que conecta el problema con la función M .

Lema 3 (Mahler). *Sea ξ un número Z y escribáse $\xi(3/2)^k = g_k + r_k$, con $g_k = \lfloor \xi(3/2)^k \rfloor$ y $r_k \in [0, 1/2)$. Entonces, para todo $k \geq 0$:*

1. $g_{k+1} = M(g_k)$; en particular, $g_k = M^k(g_0)$;
2. si g_k es impar, entonces $r_k \geq 1/3$, $r_{k+1} < 1/4$ y g_{k+1} es par.

En consecuencia, ninguna iterada $M^k(g_0)$ es congruente con 3 módulo 4.

Demostración. Se tiene $\xi(3/2)^{k+1} = \frac{3}{2}g_k + \frac{3}{2}r_k$. Si g_k es par, $\frac{3}{2}r_k < \frac{3}{4} < 1$, luego $g_{k+1} = \frac{3}{2}g_k = M(g_k)$ y $r_{k+1} = \frac{3}{2}r_k$. Si g_k es impar, $\xi(3/2)^{k+1} = \frac{3g_k+1}{2} + \frac{3r_k-1}{2}$. Si fuera $r_k < 1/3$, se tendría $\frac{3r_k-1}{2} \in [-\frac{1}{2}, 0)$, de donde $g_{k+1} = \frac{3g_k-1}{2}$ y $r_{k+1} = \frac{3r_k+1}{2} \geq \frac{1}{2}$, en contra de la hipótesis. Así pues $r_k \geq 1/3$, $g_{k+1} = \frac{3g_k+1}{2} = M(g_k)$ y $r_{k+1} = \frac{3r_k-1}{2} < \frac{1}{4}$. Como $r_{k+1} < 1/3$, el mismo argumento aplicado al paso $k+1$ muestra que g_{k+1} no puede ser impar. Finalmente, para g impar, $M(g) = (3g+1)/2$ es impar si y solo si $3g+1 \equiv 2 \pmod{4}$, es decir, si y solo si $g \equiv 3 \pmod{4}$; por el apartado 2, esto no puede ocurrir en la órbita de g_0 . $\square$

Observación 4. La aplicación abreviada de Collatz, $C_1(n) = n/2$ si n es par y $C_1(n) = (3n+1)/2$ si n es impar, coincide con M en la rama impar y difiere solo en la par. Pero esa diferencia es exactamente la diferencia de mecanismo que estudia esta nota. M multiplica siempre por $3/2$, redondeando hacia arriba, de modo que $M^k(n) \geq (3/2)^k n$: en la dinámica de Mahler el tamaño nunca se reduce, y la única “reducción” es la sustracción de la parte entera del valor real, que en el nivel entero se manifiesta como una prohibición sobre los patrones de paridad (Lema 3). C_1 , en cambio, reduce efectivamente el tamaño dividiendo por 2, y el número de divisiones consecutivas lo fija la aritmética 2-ádica del punto.

Definición 5 (Reducción endógena, Collatz). Para n impar, la reducción tras el paso $3n+1$ consiste en dividir por $2^{\nu_2(3n+1)}$, donde

$$\nu_2(3n+1) = \max\{k \in \mathbb{N} : 2^k \mid 3n+1\}.$$

A diferencia del caso anterior, $\nu_2(3n+1)$ sí depende de la estructura 2-ádica de n : es una cantidad determinada algebraicamente por el propio punto de la órbita. Como se vio en la Sección 1, sobre el conjunto de los impares sigue en densidad relativa la ley geométrica

$$\mathbb{P}(\nu_2(3n+1) = j \mid n \text{ impar}) = 2^{-j}, \quad j \geq 1,$$

es decir, se comporta como si fuera aleatoria, aun siendo enteramente determinista.

Observación 6. La distinción no es entre “determinista” y “aleatorio” —ambos mecanismos son deterministas—, sino entre reducción aditiva módulo 1, uniforme en la escala real (Mahler) y reducción multiplicativa por una potencia de 2 aritméticamente seleccionada (Collatz). En el primer caso la cantidad que se resta depende solo del valor real $\xi(3/2)^k$; en el segundo, el exponente de la potencia de 2 por la que se divide es una función explícita, no uniforme, de la congruencia de n módulo potencias de 2 crecientes. Obsérvese también que la operación $x \mapsto x/2^{\nu_2(x)}$ selecciona, para cada entero positivo, el representante impar de su clase multiplicativa módulo potencias de 2, pero el mapa completo $n \mapsto \text{odd}(3n+1)$ no desciende a ese cociente, debido al término $+1$.

3 Hacia una comparación cuantitativa

Proponemos que el primer paso, antes de cualquier intento de tender un puente formal entre ambos problemas, sea *empírico y comparativo*. Conviene empezar señalando una asimetría entre los dos objetos. $\Omega(3/2)$ es una amplitud asintótica con $1/3 \leq \Omega(3/2) \leq 1$, cuyo valor exacto se desconoce y no es directamente calculable. En el lado de Collatz, en cambio, las estadísticas de las valoraciones a lo largo de órbitas concretas sí son calculables. La comparación que se propone es, por tanto, la de una cantidad calculable con un objeto del que solo se conocen cotas.

3.1 Las variables naturales

Sea $(m_i)_{i \geq 0}$ la sucesión de impares de una órbita, $m_{i+1} = (3m_i + 1)/2^{\nu_2(3m_i+1)}$. La suma acumulativa

$$S_k^{\text{din}} := \sum_{i=0}^{k-1} (\nu_i - \log_2 3), \quad \nu_i := \nu_2(3m_i + 1),$$

es la cantidad natural para el crecimiento logarítmico de la órbita (Corolario 13 más abajo). No está centrada: bajo el modelo geométrico $\mathbb{P}(\nu = j) = 2^{-j}$, $j \geq 1$,

$$\mathbb{E}[\nu] = \sum_{j \geq 1} j 2^{-j} = 2, \quad \text{Var}[\nu] = 2, \quad \mathbb{E}[\nu - \log_2 3] = 2 - \log_2 3 \approx 0.415 \neq 0.$$

Es decir, S_k^{din} posee deriva positiva en el modelo: está normalizada respecto del umbral dinámico de crecimiento ($\log_2 3$), pero no respecto de la media de ν bajo esa ley (2). Conviene por tanto distinguir

$$S_k^{\text{din}} := \sum_{i=0}^{k-1} (\nu_i - \log_2 3), \quad S_k^{\text{cen}} := \sum_{i=0}^{k-1} (\nu_i - 2),$$

relacionadas por $S_k^{\text{din}} = S_k^{\text{cen}} + k(2 - \log_2 3)$. La primera es la variable natural para el tamaño de la órbita; la segunda mide la fluctuación respecto de la media de la ley geométrica, y es la candidata razonable para una comparación con estadísticas de amplitud.

3.2 Independencia exacta en ventanas iniciales

La ley geométrica de la Sección 1 no solo vale para una valoración aislada: en densidad, los bloques iniciales de valoraciones son exactamente independientes. Es la versión, para la sucesión acelerada de impares, de la equidistribución de vectores de paridad que subyace al trabajo de Terras [8].

Proposición 7. *Sean $r \geq 1$ y $j_0, \dots, j_{r-1} \geq 1$, y sea $J = j_0 + \dots + j_{r-1}$. El conjunto de impares m_0 tales que $\nu_2(3m_i + 1) = j_i$ para $0 \leq i < r$ es exactamente una clase residual impar módulo 2^{J+1} . En consecuencia,*

$$\text{dens}_{\text{impar}}\{m_0 : \nu_i = j_i, 0 \leq i < r\} = 2^{-J} = \prod_{i=0}^{r-1} 2^{-j_i},$$

es decir, en densidad sobre los impares, $(\nu_0, \dots, \nu_{r-1})$ tiene exactamente la ley de r variables independientes con ley geométrica de parámetro $1/2$.

Demostración. Por inducción sobre r . El caso $r = 1$ es el conteo de la Sección 1. Supóngase cierto el enunciado para $r-1$ y sea $J' = J - j_0$. Por hipótesis de inducción, la condición sobre m_1 (valoraciones $j_1, \dots, j_{r-1}$) equivale a $m_1 \equiv c \pmod{2^{J'+1}}$ para cierto c impar. La condición $\nu_2(3m_0 + 1) = j_0$ equivale a $m_0 = a + 2^{j_0+1}t$ con a impar fijo y $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$; entonces

$$m_1 = \frac{3m_0 + 1}{2^{j_0}} = b + 6t, \quad b = \frac{3a + 1}{2^{j_0}} \text{ impar.}$$

La condición $b + 6t \equiv c \pmod{2^{J'+1}}$ equivale, al ser $c - b$ par, a $3t \equiv (c - b)/2 \pmod{2^{J'}}$, que por ser 3 invertible módulo $2^{J'}$ fija t en una única clase módulo $2^{J'}$. Por tanto m_0 recorre una única clase módulo $2^{j_0+1+J'} = 2^{J+1}$, impar porque a lo es. Como hay 2^J clases impares módulo 2^{J+1} , la densidad relativa es 2^{-J} . $\square$

Corolario 8. Para cada N fijo, la ley en densidad (sobre m_0 impar) del vector $(S_0^{\text{cen}}, \dots, S_N^{\text{cen}})$, y por tanto de cualquier función suya, coincide exactamente con la del paseo aleatorio de incrementos independientes $\nu=2$, ν geométrica. En particular, para la amplitud normalizada

$$A_N := \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\max_{0 \leq k \leq N} S_k^{\text{cen}} - \min_{0 \leq k \leq N} S_k^{\text{cen}} \right),$$

la media en densidad, tomada primero para cada N fijo, converge cuando después $N \rightarrow \infty$ a $\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2/\pi} = 4/\sqrt{\pi} \approx 2.257$.

Demostración. La primera afirmación es la Proposición 7, pues $(S_k^{\text{cen}})_{k \leq N}$ es función de $(\nu_0, \dots, \nu_{N-1})$. Para la segunda, como $\text{Var}[\nu] = 2$, el principio de invariancia de Donsker da la convergencia en ley de A_N a $\sqrt{2}$ veces la amplitud $\max_{[0,1]} B - \min_{[0,1]} B$ de un movimiento browniano estándar, cuya esperanza es $2\mathbb{E}[\max_{[0,1]} B] = 2\sqrt{2/\pi}$. La convergencia de las medias se sigue de que (A_N) está acotada en L^2 , y por tanto es uniformemente integrable: como $A_N \leq \frac{2}{\sqrt{N}} \max_{k \leq N} |S_k^{\text{cen}}|$, la desigualdad maximal de Doob da $\mathbb{E}[A_N^2] \leq \frac{4}{N} \cdot 4\mathbb{E}[(S_N^{\text{cen}})^2] = \frac{16}{N} \cdot 2N = 32$. $\square$

El Corolario 8 tiene una consecuencia metodológica importante: *ninguna estadística que dependa únicamente de una ventana inicial de longitud fija puede distinguir, en distribución de densidad sobre los impares iniciales, la dinámica de Collatz del modelo geométrico independiente*. El enunciado no excluye que haya estructura detectable por otras vías (estadísticas condicionadas, selecciones de órbitas, ventanas cuya longitud crece con m_0); solo excluye este tipo concreto de estadística. La Proposición 7 es un enunciado en densidad y sigue siendo verdadera para todo patrón; lo que cambia con la escala es su utilidad para una muestra finita. Si los puntos iniciales se toman en $[1, X]$, las clases módulo 2^{J+1} solo están representadas de forma aproximadamente uniforme mientras 2^{J+1} es pequeño frente a X , es decir, mientras $\nu_0 + \dots + \nu_{k-1} \lesssim \log_2 X$. Como $\mathbb{E}[\nu] = 2$, eso abarca típicamente unos $\frac{1}{2} \log_2 X$ pasos impares, mientras que en el modelo una órbita que parte de un m_0 de tamaño comparable a X necesita del orden de $\log_2 m_0 / (2 - \log_2 3) \approx 2.41 \log_2 m_0$ pasos impares para llegar a 1. Las estadísticas de órbita completa, como la del problema siguiente, dependen también de ese tramo final, que la equidistribución no controla; por eso son un lugar natural, aunque no el único, donde buscar desviaciones respecto del modelo.

3.3 El problema

Para $n > 1$ impar cuya órbita alcanza 1 (lo que se ha verificado computacionalmente hasta cotas muy grandes), sea $\tau(n) := \min\{k \geq 1 : m_k = 1\}$ con $m_0 = n$. Es necesario detener la sucesión en ese punto: si se continuara, la órbita quedaría en el punto fijo $m = 1$, con $\nu = 2$ en cada paso, y S_k^{cen} se estancaría artificialmente. Definimos la amplitud de órbita completa

$$A(n) := \frac{1}{\sqrt{\tau(n)}} \left(\max_{0 \leq k \leq \tau(n)} S_k^{\text{cen}} - \min_{0 \leq k \leq \tau(n)} S_k^{\text{cen}} \right).$$

Problema 9. 1. ¿Cómo se distribuye $A(n)$ para $n \leq X$ impar cuando $X \rightarrow \infty$?
 ¿Coincide con la distribución que da el modelo geométrico independiente con la regla de parada análoga (primer k con $\log_2 m_0 - S_k^{\text{din}} \leq 0$)?

2. ¿Presentan $A(n)$, o las discrepancias empíricas de la sucesión (ν_i) en el tramo final de las órbitas, alguna estructura que pueda compararse de manera no meramente verbal con las amplitudes módulo 1 estudiadas por Flatto, Lagarias y Pollington para $\{\xi(3/2)^k\}$?

Para el apartado 1, el valor $4/\sqrt{\pi}$ del Corolario 8 es la referencia para ventanas fijas, no para la órbita completa: con una regla de parada, la ley de la amplitud en el modelo cambia y debe obtenerse por simulación con la misma regla. Un experimento razonable tiene así dos fases: una de control, con ventanas iniciales en las que la Proposición 7 garantiza la coincidencia exacta con el modelo (y que sirve para validar el código), y otra sobre órbitas completas, comparadas con el modelo simulado con la misma regla de parada.

Observación 10. *No hay en este momento ninguna base para conjeturar una relación cuantitativa precisa entre $\Omega(3/2)$ y $A(n)$ o cualquier otra estadística de S_k^{cen} : uno se define sobre la órbita real de un ξ fijo y el otro sobre una familia combinatoria de enteros. El apartado 2 del Problema 9 es una pregunta experimental abierta, no una consecuencia sugerida por las definiciones.*

3.4 Crecimiento logarítmico de la órbita

La cantidad S_k^{din} no es una construcción arbitraria: es exactamente el término principal que gobierna el crecimiento logarítmico de la órbita. La identidad siguiente es elemental y es la que subyace a los modelos estocásticos de [6, 4]; la incluimos con cotas explícitas para el término de corrección.

Proposición 11. *Sea $(m_i)_{i \geq 0}$ la sucesión de impares de una órbita de Collatz, definida por*

$$m_{i+1} = \frac{3m_i + 1}{2^{\nu_2(3m_i + 1)}}.$$

Entonces, para todo $k \geq 1$,

$$\log_2 m_k = \log_2 m_0 + k \log_2 3 - \sum_{i=0}^{k-1} \nu_2(3m_i + 1) + \varepsilon_k,$$

donde

$$\varepsilon_k = \sum_{i=0}^{k-1} \log_2 \left(1 + \frac{1}{3m_i} \right) > 0, \quad \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{3m_i + 1} \leq \varepsilon_k \leq \frac{1}{3 \ln 2} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{m_i}.$$

Demostración. Tomando $\log_2$ en la recurrencia,

$$\begin{aligned} \log_2 m_{i+1} &= \log_2(3m_i + 1) - \nu_2(3m_i + 1) \\ &= \log_2 3 + \log_2 m_i + \log_2 \left(1 + \frac{1}{3m_i} \right) - \nu_2(3m_i + 1). \end{aligned}$$

Sumando esta igualdad para $i = 0, \dots, k-1$ y telescopando se obtiene la identidad del enunciado, con ε_k positivo por ser suma de logaritmos de números mayores que 1. La cota superior se sigue de $\ln(1+x) \leq x$ para $x > 0$, aplicada a $x = 1/(3m_i)$. La cota inferior se sigue de $\ln(1+x) \geq x/(1+x)$ para $x > 0$, que en $x = 1/(3m_i)$ da $\log_2(1 + 1/(3m_i)) \geq 1/((3m_i + 1) \ln 2)$. $\square$

En términos de un solo paso,

$$\log_2 \frac{m_{i+1}}{m_i} = \log_2 3 - \nu_i + \delta_{m_i}, \quad \delta_m = \log_2 \left(1 + \frac{1}{3m}\right).$$

La suma de estos incrementos para $i < k$ es

$$\log_2 m_k - \log_2 m_0 = -S_k^{\text{din}} + \varepsilon_k;$$

la suma de sus partes principales $\log_2 3 - \nu_i$ es exactamente $-S_k^{\text{din}}$. Para $m = 1$ se tiene $\delta_1 = \log_2(4/3) = 2 - \log_2 3 \approx 0.415$, que no es despreciable; la coincidencia con la deriva del modelo no es casual, pues 1 es punto fijo con $\nu = 2$ y, por tanto, $0 = \log_2 3 - 2 + \delta_1$.

Observación 12. Como los términos de ε_k son positivos y $\frac{1}{3m+1} \geq \frac{1}{4m}$, las cotas de la Proposición 11 dan la equivalencia

$$(\varepsilon_k)_k \text{ converge} \iff \sum_{i \geq 0} \frac{1}{m_i} < \infty,$$

y en ese caso el límite es a lo sumo $\frac{1}{3 \ln 2} \sum_i 1/m_i$. La condición $m_i \rightarrow \infty$ no basta por sí sola: para una sucesión arbitraria, $m_i \rightarrow \infty$ no implica $\sum 1/m_i < \infty$ (basta pensar en $m_i = i$). En el extremo opuesto, si la órbita alcanza 1 y se prolonga la sucesión, ε_k crece linealmente, a razón de $\log_2(4/3)$ por paso; esta es otra razón para detenerla en $\tau(n)$.

Corolario 13. Con la notación de la Proposición 11,

$$\log_2 m_k = \log_2 m_0 - S_k^{\text{din}} + \varepsilon_k.$$

Así, S_k^{din} determina, salvo la corrección positiva y explícitamente acotada ε_k , el logaritmo (con signo cambiado) del tamaño relativo de la órbita: registra el balance entre el crecimiento multiplicativo por 3 (uniforme, $+\log_2 3$ en cada paso impar) y la contracción por la valoración 2-ádica (variable, $-\nu_i$). En particular, en $k = \tau(n)$ se tiene $S_{\tau(n)}^{\text{din}} = \log_2 n + \varepsilon_{\tau(n)}$. El modelo del Problema 9 se detiene, en cambio, cuando $S_k^{\text{din}} \geq \log_2 n$: usa la aproximación principal y omite la corrección positiva ε_k , que la órbita real sí incorpora. Como S_k^{din} no está centrada respecto de $\mathbb{E}[\nu] = 2$, la variable adecuada para las estadísticas de amplitud es $S_k^{\text{cen}} = S_k^{\text{din}} - k(2 - \log_2 3)$.

4 Conclusión

El vínculo entre el problema de Mahler y la conjetura de Collatz es antiguo y está bien documentado. Esta nota no pretende establecer un puente formal entre ambos problemas, sino señalar que los dos están asociados a un crecimiento de factor básico $3/2$ —exacto en la órbita multiplicativa de Mahler, acompañado de un término aditivo y de reducciones 2-ádicas variables en Collatz— y que cada uno controla ese crecimiento con un mecanismo distinto: una reducción aditiva módulo 1, que en el nivel entero se traduce en prohibiciones sobre los patrones de paridad de las órbitas de $M(n) = \lceil 3n/2 \rceil$, y una reducción multiplicativa por potencias de 2 aritméticamente seleccionadas.

En el lado de Collatz, la independencia exacta en densidad de las valoraciones en ventanas iniciales (Proposición 7) implica que las estadísticas de ventanas iniciales de longitud fija no pueden distinguir, en densidad, la dinámica de Collatz del modelo independiente. El Problema 9 propone un primer experimento con estadísticas de órbita completa, que quedan fuera de ese alcance. Que exista alguna relación cuantitativa con $\Omega(3/2)$ es una pregunta abierta.

Referencias

- [1] S. Akiyama, Ch. Frougny, J. Sakarovitch, *Powers of rationals modulo 1 and rational base number systems*, Israel J. Math. **168** (2008), 53–91.
- [2] L. Flatto, *Z-numbers and β -transformations*, en: *Symbolic Dynamics and its Applications*, Contemp. Math. **135**, Amer. Math. Soc., Providence, 1992, 181–201.
- [3] L. Flatto, J. C. Lagarias, A. D. Pollington, *On the range of fractional parts $\{\xi(p/q)^n\}$* , Acta Arith. **70** (1995), 125–147.
- [4] A. V. Kontorovich, J. C. Lagarias, *Stochastic models for the $3x + 1$ and $5x + 1$ problems*, en: J. C. Lagarias (ed.), *The Ultimate Challenge: The $3x + 1$ Problem*, Amer. Math. Soc., Providence, 2010, 131–188.
- [5] J. C. Lagarias, *The $3x + 1$ problem and its generalizations*, Amer. Math. Monthly **92** (1985), 3–23.
- [6] J. C. Lagarias, A. Weiss, *The $3x + 1$ problem: two stochastic models*, Ann. Appl. Probab. **2** (1992), 229–261.
- [7] K. Mahler, *An unsolved problem on the powers of $3/2$* , J. Austral. Math. Soc. **8** (1968), 313–321.
- [8] R. Terras, *A stopping time problem on the positive integers*, Acta Arith. **30** (1976), 241–252.