

Estructura de la fila principal y transiciones 2-ádicas del operador impar de Collatz

Miguel Cerdá Bennassar

Enero de 2026; revisado en septiembre de 2026

Resumen

Se estudia el operador impar de Collatz

$$T(m) = \frac{3m+1}{2^{v_2(3m+1)}},$$

sobre la partición del conjunto de los impares en las clases $\mathcal{M} = \{m \not\equiv 5 \pmod{8}\}$ y $\mathcal{E} = \{m \equiv 5 \pmod{8}\}$. Se prueba que esta partición no es una elección arbitraria de congruencias, sino que está determinada por la profundidad del colapso 2-ádico: $\mathcal{M}$ coincide con $\{m : v_2(3m+1) \leq 2\}$, la restricción $T|_{\mathcal{M}}$ es una biyección sobre el conjunto de los impares coprimos con 3, y $\mathcal{M}$ es exactamente el conjunto de las preimágenes de colapso mínimo. Es decir, $\mathcal{M}$ es una sección inversa canónica del operador impar, si bien no es un conjunto invariante por T .

Se describe después la clase complementaria $\mathcal{E}$, donde $v_2(3m+1) = 3 + v_2(3k+2)$ para $m = 8k+5$, y se obtiene una descripción exacta de las transiciones residuales: si $v_2(3m+1) = s < r$, la clase de m módulo 2^r determina s y determina $T(m)$ módulo 2^{r-s} . Cada iteración consume así s niveles de precisión 2-ádica: a lo sumo 2 sobre $\mathcal{M}$, y al menos 3, sin cota uniforme, sobre $\mathcal{E}$. Se demuestra finalmente que $T(m) \equiv (-1)^{v_2(3m+1)} \pmod{3}$, de modo que la clase módulo 3 de una órbita codifica únicamente la paridad del colapso precedente. Estos resultados no constituyen una prueba de la conjetura de Collatz; delimitan la parte del operador que admite control local exacto y localizan la dificultad en la acumulación de colapsos a lo largo de una órbita.

1. El escenario impar reducido

Definición 1.1 (Escenario impar reducido). Entendemos por *escenario* un marco estático de clasificación de los números impares, independiente de cualquier representación gráfica explícita. Consideramos el escenario definido por el conjunto de los impares, dispuestos en dos filas disjuntas:

$$\mathcal{M} = \{m \text{ impar} : m \not\equiv 5 \pmod{8}\}, \quad \mathcal{E} = \{m \text{ impar} : m \equiv 5 \pmod{8}\}.$$

La fila $\mathcal{M}$ se denomina *fila principal* y la fila $\mathcal{E}$ *fila complementaria*. Este escenario cubre a todos los impares como nodos y no depende de ninguna dinámica.

Sobre este escenario consideramos el operador impar de Collatz

$$T(m) = \frac{3m+1}{2^{v_2(3m+1)}}, \quad m \text{ impar},$$

donde v_2 denota la valuación 2-ádica. Los valores pares asociados al colapso 2-ádico no se consideran estados del escenario, sino pasos intermedios eliminados por la proyección a los nodos impares.

Denotamos por

$$\mathcal{I} = \{n \text{ impar} : 3 \nmid n\}$$

el conjunto de los impares coprimos con 3. Como $3m + 1 \equiv 1 \pmod{3}$ para todo m , se tiene $T(m) \in \mathcal{I}$ para todo impar m : la imagen del operador está contenida en $\mathcal{I}$, y por tanto todo término de una órbita impar, salvo a lo sumo el inicial, es coprimo con 3.

2. Valuación 2-ádica y significado de la partición

Lema 2.1 (Criterio de profundidad del colapso). *Sea $s \geq 1$ y sea ρ_s el único residuo impar módulo 2^s con $3\rho_s \equiv -1 \pmod{2^s}$. Entonces, para todo impar m ,*

$$v_2(3m + 1) \geq s \iff m \equiv \rho_s \pmod{2^s}.$$

En particular $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 1$, $\rho_3 = 5$, $\rho_4 = 5$, y la proporción de impares con $v_2(3m + 1) = s$ es exactamente 2^{-s} .

Demostración. Como 3 es invertible módulo 2^s , la congruencia $3m + 1 \equiv 0 \pmod{2^s}$ equivale a $m \equiv -3^{-1} \equiv \rho_s \pmod{2^s}$, y $v_2(3m + 1) \geq s$ equivale precisamente a $2^s \mid 3m + 1$. Los valores indicados se obtienen de $3^{-1} \equiv 1, 3, 3, 11 \pmod{2, 4, 8, 16}$ respectivamente.

Para la densidad, entre las 2^{s-1} clases de impares módulo 2^s hay exactamente una que cumple la condición, luego la proporción de impares con $v_2(3m + 1) \geq s$ es $2^{-(s-1)}$, y la de aquellos con $v_2(3m + 1) = s$ es $2^{-(s-1)} - 2^{-s} = 2^{-s}$. $\square$

Corolario 2.2 (Caracterización dinámica de la partición). *Se tiene*

$$\mathcal{M} = \{m \text{ impar} : v_2(3m + 1) \leq 2\}, \quad \mathcal{E} = \{m \text{ impar} : v_2(3m + 1) \geq 3\}.$$

Más precisamente, $\mathcal{M}$ se descompone en las dos clases

$$m \equiv 3 \pmod{4} \implies v_2(3m + 1) = 1, \quad m \equiv 1 \pmod{8} \implies v_2(3m + 1) = 2,$$

y las densidades relativas de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{E}$ dentro de los impares son $3/4$ y $1/4$.

Demostración. Por el Lema 2.1 con $s = 3$, se tiene $v_2(3m + 1) \geq 3$ si y sólo si $m \equiv 5 \pmod{8}$, es decir, si y sólo si $m \in \mathcal{E}$. El complemento $\mathcal{M}$ es por tanto $\{v_2(3m + 1) \leq 2\}$. La descomposición se sigue del mismo lema con $s = 2$: $v_2(3m + 1) \geq 2$ equivale a $m \equiv 1 \pmod{4}$, luego los $m \equiv 3 \pmod{4}$ tienen valuación exactamente 1; y entre los $m \equiv 1 \pmod{4}$, los que no están en $\mathcal{E}$ son los $m \equiv 1 \pmod{8}$, con valuación exactamente 2. Las densidades son $1/2 + 1/4$ y $1/4$. $\square$

Comentario 2.3. La partición $\mathcal{M} \sqcup \mathcal{E}$, definida en el escenario mediante una única congruencia módulo 8, resulta pues intrínseca al operador: separa los nodos cuyo colapso 2-ádico está uniformemente acotado de aquellos en que no lo está.

3. La fila principal como sección del operador

Definición 3.1 (Sección inversa). Sea S un subconjunto de los impares. Diremos que S es una *sección inversa* de T sobre $\mathcal{I}$ si la restricción $T|_S: S \rightarrow \mathcal{I}$ es biyectiva, es decir, si S contiene exactamente una preimagen de cada elemento de $\mathcal{I}$.

Teorema 3.2 (Biyectividad de T sobre la fila principal). *La restricción $T|_{\mathcal{M}}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{I}$ es una biyección, dada explícitamente por las dos ramas afines*

$$T(4j+3) = 6j+5 \quad (j \geq 0), \quad T(8j+1) = 6j+1 \quad (j \geq 0),$$

cuya inversa es

$$T|_{\mathcal{M}}^{-1}(n) = \begin{cases} \frac{4n-1}{3}, & n \equiv 1 \pmod{3}, \\ \frac{2n-1}{3}, & n \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

Demostración. Por el Corolario 2.2, si $m = 4j+3$ entonces $v_2(3m+1) = 1$ y

$$T(m) = \frac{12j+10}{2} = 6j+5,$$

mientras que si $m = 8j+1$ entonces $v_2(3m+1) = 2$ y

$$T(m) = \frac{24j+4}{4} = 6j+1.$$

Ambas aplicaciones son afines en j con coeficiente director no nulo, luego inyectivas. Sus imágenes son $\{6j+5 : j \geq 0\}$, que es el conjunto de impares $\equiv 2 \pmod{3}$, y $\{6j+1 : j \geq 0\}$, que es el de los impares $\equiv 1 \pmod{3}$. Estos dos conjuntos son disjuntos y su unión es $\mathcal{I}$. Por tanto $T|_{\mathcal{M}}$ es inyectiva y sobreyectiva sobre $\mathcal{I}$. Las fórmulas de la inversa se obtienen despejando j en cada rama. $\square$

Corolario 3.3 ($\mathcal{M}$ es la sección de colapso mínimo). *Sea $n \in \mathcal{I}$. El conjunto de preimágenes de n bajo T es*

$$T^{-1}(n) = \left\{ \frac{2^a n - 1}{3} : a \geq 1, 2^a n \equiv 1 \pmod{3} \right\},$$

que es infinito, y los exponentes admisibles a forman una progresión aritmética de razón 2. El elemento correspondiente al menor exponente admisible es precisamente $T|_{\mathcal{M}}^{-1}(n)$. En consecuencia,

$$\mathcal{M} = \{m \text{ impar} : m \text{ es la preimagen de colapso mínimo de } T(m)\},$$

y $\mathcal{E}$ es el conjunto de los impares que no lo son.

Demostración. Un impar m cumple $T(m) = n$ si y sólo si $3m+1 = 2^a n$ para algún $a \geq 1$, es decir $m = (2^a n - 1)/3$, lo que exige $2^a n \equiv 1 \pmod{3}$. Como $2 \equiv -1 \pmod{3}$, esta condición es $(-1)^a n \equiv 1 \pmod{3}$: si $n \equiv 1 \pmod{3}$ se cumple exactamente para a par, y si $n \equiv 2 \pmod{3}$ exactamente para a impar. En el primer caso el menor exponente admisible es $a = 2$, que da $m = (4n - 1)/3$; en el segundo es $a = 1$, que da $m = (2n - 1)/3$. Ambos coinciden con las fórmulas del Teorema 3.2, cuyos valores están en $\mathcal{M}$. Recíprocamente, si $m \in \mathcal{E}$ entonces $v_2(3m+1) \geq 3$ por el Corolario 2.2, luego m corresponde a un exponente $a \geq 3$, estrictamente mayor que el mínimo admisible, que es 1 o 2. $\square$

Corolario 3.4 (Generación de las fibras por $x \mapsto 4x + 1$). Sea $n \in \mathcal{I}$ y sea $x_1 = T|_{\mathcal{M}}^{-1}(n)$ su preimagen de colapso mínimo. Entonces la fibra completa de n es la órbita de x_1 bajo la aplicación $x \mapsto 4x + 1$:

$$T^{-1}(n) = \{x_k\}_{k \geq 1}, \quad x_{k+1} = 4x_k + 1,$$

y explícitamente

$$x_k = \frac{4^k n - 1}{3} \quad \text{si } n \equiv 1 \pmod{3}, \quad x_k = \frac{4^k n - 2}{6} \quad \text{si } n \equiv 2 \pmod{3},$$

en ambos casos para $k \geq 1$. Además $x_1 \in \mathcal{M}$ y $x_k \in \mathcal{E}$ para todo $k \geq 2$. En consecuencia

$$\mathcal{E} = \{4x + 1 : x \text{ impar}\},$$

es decir, la fila complementaria es exactamente el conjunto de las preimágenes no mínimas, generadas a partir de las mínimas por $x \mapsto 4x + 1$.

Demostración. Por el Corolario 3.3, los exponentes admisibles para n forman la progresión $a_{\min}, a_{\min} + 2, a_{\min} + 4, \dots$, con $a_{\min} = 2$ si $n \equiv 1 \pmod{3}$ y $a_{\min} = 1$ si $n \equiv 2 \pmod{3}$. Tomando $a = a_{\min} + 2(k - 1)$ en $x = (2^a n - 1)/3$ se obtienen las dos expresiones indicadas, con x_1 igual a la preimagen de colapso mínimo.

Para la recurrencia, en el primer caso $3x_{k+1} = 4^{k+1}n - 1$ y $3(4x_k + 1) = 4(4^k n - 1) + 3 = 4^{k+1}n - 1$; en el segundo $6x_{k+1} = 4^{k+1}n - 2$ y $6(4x_k + 1) = 4(4^k n - 2) + 6 = 4^{k+1}n - 2$. En ambos, $x_{k+1} = 4x_k + 1$.

Finalmente, si x es impar, $x = 2j + 1$ y $4x + 1 = 8j + 5 \equiv 5 \pmod{8}$, luego $4x + 1 \in \mathcal{E}$; recíprocamente, todo $8j + 5$ es $4(2j + 1) + 1$. Como los x_k son impares, se sigue que $x_k \in \mathcal{E}$ para $k \geq 2$, mientras que $x_1 \in \mathcal{M}$ por el Corolario 3.3. $\square$

Comentario 3.5 (Forma compacta de las fibras). Escribiendo $F(x) = 4x + 1$ y $P(n) = T|_{\mathcal{M}}^{-1}(n)$ para la preimagen de colapso mínimo, el Corolario 3.4 se resume en una sola expresión,

$$T^{-1}(n) = \{F^j(P(n)) : j \geq 0\}, \quad F^j(x) = 4^j x + \frac{4^j - 1}{3},$$

con la distinción según la clase de n módulo 3 confinada al cálculo de $P(n)$. En estos términos, $\mathcal{M} = P(\mathcal{I})$ y $\mathcal{E} = F(\{\text{impares}\})$.

Proposición 3.6 (Clase módulo 3 de la imagen). Para todo impar m se tiene

$$T(m) \equiv (-1)^{v_2(3m+1)} \pmod{3}.$$

En particular, la clase módulo 3 de $T(m)$ no depende de m más que a través de la paridad de su exponente de colapso: vale 1 si $v_2(3m + 1)$ es par y 2 si es impar.

Demostración. Escribiendo $s = v_2(3m + 1)$ se tiene $2^s T(m) = 3m + 1 \equiv 1 \pmod{3}$, luego $T(m) \equiv 2^{-s} \equiv (-1)^{-s} \equiv (-1)^s \pmod{3}$. $\square$

Comentario 3.7. La Proposición 3.6 precisa el papel de la componente módulo 3: en una transición individual, la clase de $T(m)$ módulo 3 no aporta información independiente del exponente de colapso, pues queda determinada por la paridad de $v_2(3m + 1)$ y no depende de m de ninguna otra forma. En particular, la clase de $T(m)$ módulo 3 no depende de la clase de m módulo 3: la componente módulo 3 del nodo de partida no se transmite a la imagen. Esto no excluye que el estudio de estados conjuntos módulo $3 \cdot 2^r$ pueda resultar útil al componer transiciones sucesivas; indica únicamente que la información propiamente nueva que se gana al refinar el escenario es de naturaleza 2-ádica.

Comentario 3.8 (Codificación por rutas y su alcance). Los Corolarios 3.3 y 3.4 organizan el árbol inverso de T : cada $n \in \mathcal{I}$ tiene una preimagen mínima única $P(n)$, y su fibra completa es la órbita de $P(n)$ bajo $F(x) = 4x + 1$. Sea $\mathcal{R}$ el conjunto de los nodos del árbol inverso enraizado en el 1, es decir, los enteros que se obtienen partiendo del 1 y aplicando un número finito de veces la elección de un término de la fibra en curso. Registrando, en cada fibra visitada, la posición $k \geq 1$ del término elegido, cada elemento de $\mathcal{R}$ queda codificado por una sucesión finita de enteros positivos, y el Corolario 3.4 proporciona el procedimiento explícito para reconstruirlo a partir de ella.

Conviene delimitar el alcance con precisión, porque la codificación está definida sobre $\mathcal{R}$ y no sobre el conjunto de todos los impares. Obsérvese que $\mathcal{R}$ *no* está contenido en $\mathcal{I}$: los términos de posición $k \geq 2$ de una fibra pueden ser múltiplos de 3, como $21 \in T^{-1}(1)$, o como 3, 9 y 45 en la figura 1. Tales términos pertenecen al árbol, pero son hojas: por la Sección 1 carecen de preimagen. Con esta precisión, $\mathcal{R}$ es exactamente el conjunto de los impares positivos cuya órbita impar llega al 1, y afirmar que $\mathcal{R}$ contiene a todos los impares positivos equivale a afirmar la conjetura de Collatz. La codificación no puede emplearse, por tanto, como argumento sobre la convergencia, pues es una reformulación de ella.

Sí es incondicional el diccionario entre posiciones y valuaciones. Si un término ocupa la posición k en la fibra de su imagen, su exponente de colapso vale $2k$ cuando la imagen es $\equiv 1 \pmod{3}$ y $2k - 1$ cuando es $\equiv 2 \pmod{3}$, por el Corolario 3.4. La sucesión de posiciones de una ruta, junto con la clase módulo 3 de cada imagen, determina en consecuencia el vector de valuaciones de la órbita directa, leído en sentido inverso. Esta codificación aparece en las notas mencionadas en la Nota de procedencia, bajo los nombres de *altitud* y *latitud*. La correspondencia entre caminos del árbol inverso y enteros es clásica y no se desarrolla aquí.

4. La fila complementaria y la profundidad del colapso

Lema 4.1 (Valuación 2-ádica en la clase $m \equiv 5 \pmod{8}$). *Sea $m \in \mathcal{E}$, es decir, $m = 8k + 5$ para algún $k \geq 0$. Entonces*

$$v_2(3m + 1) = 3 + v_2(3k + 2), \quad T(m) = \text{odd}(3k + 2),$$

donde $\text{odd}(n)$ denota la parte impar de n . En particular $v_2(3m + 1) \geq 3$ y toma todos los valores $3 + t$, $t \geq 0$, sobre infinitos elementos de $\mathcal{E}$.

Demostración. Si $m = 8k + 5$, entonces

$$3m + 1 = 3(8k + 5) + 1 = 24k + 16 = 8(3k + 2),$$

de donde $v_2(3m + 1) = 3 + v_2(3k + 2)$ y $T(m) = \text{odd}(3k + 2)$. Como 3 es invertible módulo 2^{t+1} para todo $t \geq 0$, la congruencia $3k \equiv -2 \pmod{2^{t+1}}$ admite solución, y las soluciones que además cumplen $3k \not\equiv -2 \pmod{2^{t+2}}$ forman una clase módulo 2^{t+2} ; para ellas $v_2(3k + 2) = t$. $\square$

Comentario 4.2. El Lema 4.1 es el paso inductivo del Lema 2.1: la clase $m \equiv 5 \pmod{8}$ se estratifica de nuevo según $v_2(3k + 2)$, y el proceso se repite indefinidamente. La fila complementaria no admite, pues, una descripción uniforme análoga a la del Teorema 3.2: sobre ella el exponente de colapso es una función no acotada del nodo.

5. Transiciones residuales y pérdida de información

El Teorema 3.2 describe el comportamiento de un paso del operador cuando el nodo de partida pertenece a $\mathcal{M}$. Conviene subrayar que $\mathcal{M}$ no es invariante por T : se tiene $T(\mathcal{M}) = \mathcal{I}$, y $\mathcal{I}$ no está contenido en $\mathcal{M}$, pues por ejemplo $5 \in \mathcal{I} \cap \mathcal{E}$ y $T(3) = 5$. La fila principal es una sección inversa (Definición 3.1), no un subsistema cerrado, y esta es precisamente la razón por la que el control exacto de una iteración no se propaga automáticamente a la composición de varias. La proposición siguiente precisa qué se conserva y qué se pierde en cada paso cuando se trabaja módulo potencias de 2.

Proposición 5.1 (Transición residual). *Sea $r \geq 1$ y sea m impar con $s = v_2(3m + 1) < r$. Entonces la clase de m módulo 2^r determina s y determina la clase de $T(m)$ módulo 2^{r-s} .*

Demostración. Por el Lema 2.1, la condición $v_2(3m + 1) \geq s$ depende sólo de m módulo 2^s , y la condición $v_2(3m + 1) \geq s + 1$ sólo de m módulo 2^{s+1} ; como $s + 1 \leq r$, la clase de m módulo 2^r determina el valor exacto de s . Conocida m módulo 2^r queda determinado $3m + 1$ módulo 2^r , y al dividir por 2^s queda determinado $(3m + 1)/2^s = T(m)$ módulo 2^{r-s} . $\square$

Corolario 5.2 (Coste acumulado de un segmento de órbita). *Sea m_0 impar, sea $(m_n)_{n \geq 0}$ su órbita impar bajo T , sean $s_n = v_2(3m_n + 1)$ y $S = s_0 + \dots + s_{N-1}$. Entonces, para todo $r \geq 1$, la clase de m_0 módulo 2^{r+S} determina los exponentes $s_0, \dots, s_{N-1}$ y determina la clase de m_N módulo 2^r .*

Demostración. Pongamos $R_n = r + s_n + s_{n+1} + \dots + s_{N-1}$ para $0 \leq n \leq N$, de modo que $R_0 = r + S$, $R_N = r$ y $R_{n+1} = R_n - s_n$. Como $r \geq 1$, se tiene $R_n > s_n$ para todo $n < N$. Supuesta conocida la clase de m_n módulo 2^{R_n} , la Proposición 5.1 determina s_n y la clase de m_{n+1} módulo $2^{R_n - s_n} = 2^{R_{n+1}}$. Iterando desde $n = 0$ se obtienen sucesivamente $s_0, \dots, s_{N-1}$ y la clase de m_N módulo $2^{R_N} = 2^r$. $\square$

Comentario 5.3. El enunciado anterior está condicionado al segmento de órbita considerado: el módulo inicial requerido depende de S , cantidad que sólo se conoce una vez recorrido dicho segmento. No describe, por tanto, ningún procedimiento predictivo. Obsérvese, no obstante, que tampoco hay circularidad: fijado el módulo 2^{r+S} , la clase de m_0 determina por sí sola los exponentes $s_0, \dots, s_{N-1}$, que no es preciso suponer conocidos de antemano. Lo que el segmento aporta desde fuera es únicamente cuánta precisión inicial hace falta, no cuál es la órbita.

Comentario 5.4. Por el Corolario 2.2, si $m_n \in \mathcal{M}$ para todo $0 \leq n < N$ entonces $S \leq 2N$, y el módulo 2^{r+2N} es suficiente con independencia de la órbita concreta. Si algún m_n pertenece a $\mathcal{E}$, la contribución de ese paso a S es al menos 3 y no admite cota uniforme sobre $\mathcal{E}$ (Lema 4.1).

Comentario 5.5 (Heurística de descenso). Por el Lema 2.1, el valor esperado de s sobre los impares, con la densidad natural, es $\sum_{s \geq 1} s 2^{-s} = 2$. Como $3/2^2 < 1$, ello sugiere un descenso multiplicativo medio por iteración. Esta observación es puramente heurística: no hay aquí ninguna afirmación sobre órbitas individuales, cuyos exponentes de colapso no son independientes ni están controlados por la densidad natural.

Comentario 5.6 (Programa). Los resultados anteriores delimitan el ámbito en que la dinámica admite control exacto: sobre $\mathcal{M}$ el operador es una biyección afín a trozos que consume a lo sumo dos niveles de precisión 2-ádica por iteración. El estudio de la composición de iteraciones queda abierto, y la dirección natural es el análisis de las matrices de transición inducidas por T entre clases módulo 2^r para r creciente, cuya estructura no se aborda aquí. No se formula ninguna conjetura al respecto: cualquier enunciado de ese tipo debería surgir de una regularidad demostrada en dichas transiciones.

6. Estructura enumerativa de $T(\mathcal{M})$

Observación 6.1 (Advertencia sobre el índice). En esta sección se estudia la sucesión de valores $T(m)$ obtenida al recorrer los elementos de $\mathcal{M}$ en orden creciente. El índice n empleado es un **índice de enumeración** de la fila principal y **no un tiempo dinámico**. En particular, las relaciones entre a_n y a_{n+1} , así como la recurrencia lineal que satisface (a_n) , no describen iteraciones sucesivas del operador T : en general $a_{n+1} \neq T(a_n)$, y ya el primer término lo muestra, pues $T(a_0) = T(1) = 1 \neq 5 = a_1$. Los enunciados de esta sección son propiedades del orden elegido sobre $\mathcal{M}$, no invariantes del operador.

Lema 6.2 (Enumeración de la fila principal). *Ordenados de forma creciente, los elementos de $\mathcal{M}$ son*

$$M_{3t} = 8t + 1, \quad M_{3t+1} = 8t + 3, \quad M_{3t+2} = 8t + 7 \quad (t \geq 0).$$

Demostración. En cada intervalo $[8t, 8t + 8)$ los impares son $8t + 1, 8t + 3, 8t + 5, 8t + 7$, de los cuales exactamente uno, $8t + 5$, pertenece a $\mathcal{E}$. La fila principal contiene por tanto tres elementos por bloque de ocho enteros consecutivos, en el orden indicado. $\square$

Proposición 6.3 (Descomposición afín de la enumeración). *Sea $a_n = T(M_n)$. Entonces*

$$a_n = \begin{cases} 6k + 1, & n = 3k, \\ 12k + 5, & n = 3k + 1, \\ 12k + 11, & n = 3k + 2, \end{cases} \quad (k \geq 0),$$

es decir $(a_n) = (1, 5, 11, 7, 17, 23, 13, 29, 35, 19, 41, 47, \dots)$. Su función generatriz ordinaria es

$$G(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n = \frac{x^5 + 7x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 5x + 1}{(1 - x^3)^2},$$

y la sucesión satisface la recurrencia lineal

$$a_n = 2a_{n-3} - a_{n-6}, \quad n \geq 6.$$

Demostración. Por el Lema 6.2 y el Teorema 3.2: $T(8t + 1) = 6t + 1$; $T(8t + 3) = T(4(2t) + 3) = 12t + 5$; y $T(8t + 7) = T(4(2t + 1) + 3) = 12t + 11$.

Cada subsucesión $(a_{3k+r})_{k \geq 0}$ es por tanto una progresión aritmética, de razón 6, 12 y 12 respectivamente. Escribiendo $y = x^3$ y usando $\sum_{k \geq 0} y^k = (1 - y)^{-1}$ y $\sum_{k \geq 0} k y^k = y(1 - y)^{-2}$, las tres contribuciones son

$$\frac{5y + 1}{(1 - y)^2}, \quad x \frac{7y + 5}{(1 - y)^2}, \quad x^2 \frac{y + 11}{(1 - y)^2},$$

cuya suma, con $y = x^3$, da el numerador $x^5 + 7x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 5x + 1$ sobre $(1 - x^3)^2$. Como el denominador es $(1 - x^3)^2 = 1 - 2x^3 + x^6$ y el numerador tiene grado 5, la extracción de coeficientes da $a_n = 2a_{n-3} - a_{n-6}$ para $n \geq 6$. $\square$

Proposición 6.4 (Crecimiento de la enumeración). *Se tiene*

$$\frac{a_{3k}}{3k} \rightarrow 2, \quad \frac{a_{3k+1}}{3k+1} \rightarrow 4, \quad \frac{a_{3k+2}}{3k+2} \rightarrow 4,$$

Cuadro 1: Ramas afines de la enumeración $a_n = T(M_n)$ sobre la fila principal $\mathcal{M}$. La periodicidad módulo 3 procede del Lema 6.2: cada bloque de ocho enteros consecutivos aporta tres elementos a $\mathcal{M}$.

Clase de n módulo 3	Rama a_{3k+r}	Razón	Término $k = 0$
$r = 0$	$6k + 1$	6	1
$r = 1$	$12k + 5$	12	5
$r = 2$	$12k + 11$	12	11

de modo que $\liminf_n a_n/n = 2$ y $\limsup_n a_n/n = 4$, y el límite de a_n/n no existe. No existe ninguna constante c para la cual $a_n - cn$ esté acotada. En cambio,

$$\sum_{n=0}^N a_n \sim \frac{5}{3}N^2, \quad \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a_n}{n+1} \rightarrow \frac{10}{3},$$

siendo $10/3 = (2 + 4 + 4)/3$ la pendiente media de las tres ramas.

Demostración. Los tres límites son inmediatos a partir de la Proposición 6.3, y de ellos se siguen el $\liminf$ y el $\limsup$. Si $a_n - cn$ estuviese acotada, entonces $a_n/n \rightarrow c$, en contradicción con que $\liminf \neq \limsup$.

Para la suma parcial, agrupando por clases de n módulo 3 y sumando las tres progresiones aritméticas se obtiene un polinomio en N de grado 2 cuyo coeficiente principal es la media de las razones dividida por 2; explícitamente,

$$\sum_{n=0}^N a_n = \frac{10}{3} \cdot \frac{N^2}{2} + O(N) \sim \frac{5}{3}N^2.$$

Para el promedio de Cesàro, $a_n/(n+1)$ toma valores que convergen a 2, 4 y 4 según la clase de n módulo 3, luego su promedio converge a $(2 + 4 + 4)/3 = 10/3$. $\square$

Comentario 6.5 (Sobre la función generatriz). La serie $\sum a_n x^n$ tiene radio de convergencia 1 y G presenta polos dobles en las tres raíces cúbicas de la unidad. Como $P(1) = 30$ y $(1 - x^3)^2 \sim 9(1 - x)^2$ cuando $x \rightarrow 1$, se tiene $G(x) \sim \frac{10}{3}(1 - x)^{-2}$, lo que recupera la pendiente media de la Proposición 6.4. Conviene subrayar que los polos dobles en ω y ω^2 no corresponden a una oscilación acotada superpuesta a una tendencia lineal: un polo doble en ω aporta un término de la forma $(An + B)\omega^{-n}$, que crece linealmente. Una oscilación acotada exigiría que dichos polos fuesen simples. Esto es coherente con la Proposición 6.4: las tres ramas tienen pendientes distintas, de manera que la desviación respecto de cualquier recta fija crece linealmente.

Comentario 6.6. Todos los enunciados de esta sección dependen del orden creciente fijado sobre $\mathcal{M}$ y cambian si se altera dicho orden. No son, por tanto, propiedades del operador T , a diferencia de las de las secciones 2 a 5. Se incluyen aquí porque describen de forma compacta y exacta la lista de imágenes de la fila principal, y porque la distinción entre estructura enumerativa y estructura dinámica es en sí misma pertinente para el problema.

Nota de procedencia

Los objetos centrales de este capítulo no son de introducción reciente. Proceden de notas propias fechadas en Pollensa el 24 de julio de 2018 y del material gráfico asociado.

- El escenario de dos filas aparece allí como la distinción entre las *cotas inferiores* de las sucesiones y los *términos intermedios*, identificados como los impares de la forma $8n - 3$, que son exactamente los de $\mathcal{E}$.
- La caracterización de la fila principal del Corolario 3.3 está enunciada de forma literal: la cota inferior de una sucesión puede ser cualquier impar que no sea de la forma $8n - 3$, precisamente porque esos son los demás términos de las sucesiones.
- Las dos ramas de la inversa del Teorema 3.2 aparecen como $(4R - 1)/3$ para los impares $R \equiv 1$ y $(4R - 2)/6$ para $R \equiv 2$ módulo 3; las fibras completas, como $(4^k R - 1)/3$ y $(4^k R - 2)/6$; y la generación por $x \mapsto 4x + 1$ del Corolario 3.4, de forma explícita.
- El hecho de que los múltiplos de 3 carezcan de preimagen aparece como que los impares de la forma $6n - 3$ no forman ninguna sucesión, por no llegar a ellos ningún impar.
- La sucesión (a_n) de la Sección 6 y su función generatriz figuran ya en ese material, donde a_n es la lista de los términos a los que enlaza cada cota inferior.

Este último punto conviene subrayarlo. En las notas de 2018 la sucesión (a_n) no se presenta en ningún momento como una órbita, sino como una lista de enlaces, es decir, como la imagen $T(\mathcal{M})$. La lectura enumerativa adoptada en la Sección 6, con la advertencia de la Observación 6.1, no degrada aquel material: restituye su sentido original.

Esta nota tiene valor histórico y no constituye una reivindicación de prioridad frente a la literatura existente: se trata de notas de trabajo del autor, y todas las afirmaciones matemáticas del capítulo se justifican aquí de forma autónoma, con independencia de su procedencia.

7. Alcance de los resultados

El escenario introducido cubre a todos los impares como nodos, y la partición $\mathcal{M} \sqcup \mathcal{E}$ resulta estar determinada por la profundidad del colapso 2-ádico (Corolario 2.2). Sobre la fila principal el operador es una biyección afín a trozos sobre el conjunto de los impares coprimos con 3 (Teorema 3.2), y dicha fila es exactamente la sección de colapso mínimo (Corolario 3.3). Sobre la fila complementaria el colapso es de profundidad no acotada y admite una estratificación recursiva (Lema 4.1).

Estos resultados no constituyen una prueba de la conjetura de Collatz, ni pretenden aproximarse a ella. La dificultad del problema no reside en los aspectos locales del operador descritos aquí, que admiten una caracterización exacta, sino en la composición de iteraciones: por el Corolario 5.2, el control módulo 2^r de una órbita se degrada a un ritmo gobernado por la sucesión de exponentes de colapso, cuya regularidad global es precisamente lo que está en cuestión.

A. El árbol de fibras enlazadas

Cada fila de la figura 1 es una fibra $T^{-1}(n)$, generada desde la preimagen mínima $P(n)$ por $F(x) = 4x + 1$; los dos tonos distinguen las dos ramas del Teorema 3.2 según la clase de n módulo 3. Las celdas recuadradas y las flechas trazan la órbita impar de 203, de posiciones 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 2 y exponentes de colapso 1, 2, 4, 1, 2, 2, 4, 1, 1, 2, 3, 4, ligados por el diccionario del Comentario 3.8. La órbita cambia de fibra en cada paso: es la lectura gráfica de que $\mathcal{M}$ es una sección inversa y no un conjunto invariante.

$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	
203	813	3253	13013	$T^{-1}(305)$
305	1221	4885	19541	$T^{-1}(229)$
57	229	917	3669	$T^{-1}(43)$
43	173	693	2773	$T^{-1}(65)$
65	261	1045	4181	$T^{-1}(49)$
49	197	789	3157	$T^{-1}(37)$
9	37	149	597	$T^{-1}(7)$
7	29	117	469	$T^{-1}(11)$
11	45	181	725	$T^{-1}(17)$
17	69	277	1109	$T^{-1}(13)$
3	13	53	213	$T^{-1}(5)$
1	5	21	85	$T^{-1}(1)$

Figura 1: Fibras de T y órbita impar de 203. En cada fila, el término de posición $k = 1$ pertenece a $\mathcal{M}$ y los de posición $k \geq 2$ a $\mathcal{E}$; cada flecha es una aplicación de T , que lleva el término señalado de una fibra al de la siguiente.

B. Figura original de las notas de 2018

Se reproduce a continuación, con valor documental, el diagrama original del que procede la figura anterior. Corresponde al material mencionado en la Nota de procedencia y representa las mismas fibras enlazadas, dispuestas en escalera y con los enlaces intermedios —pares y semienteros— explícitos.

Gráfico de los tramos intermedios que forman las secuencias Dosena, a partir del número 203.
Especialmente clara es la visualización de los enlaces entre tramos, gracias a los números pares y semienteros.
Los impares de la forma $6n+5$ se muestran en naranja y los $6n+1$ en magenta.
Los semienteros conectan los tramos en los puntos crecientes de la trayectoria; los pares, en los puntos decrecientes.
Todos los impares de la secuencia de Collatz están en los vértices de la línea de trayectoria.
Recomendamos calcular las secuencias con el generador y comprobar las trayectorias.

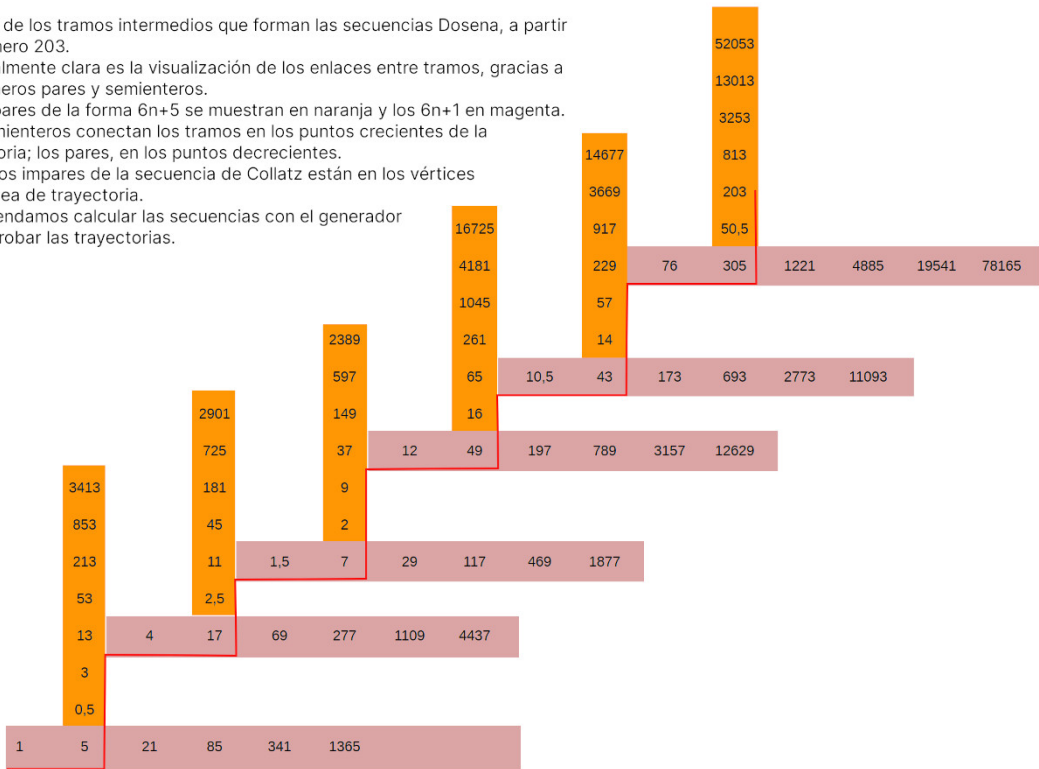


Figura 2: Figura original de las notas de 2018: tramos enlazados y trayectoria de 203.