

Dos formulaciones de una dinámica tipo Collatz

Miguel Cerdá Bennassar

Enero de 2026; revisado en septiembre de 2026

Resumen

Se estudian dos aplicaciones F_1 y F_2 definidas sobre el escenario extendido $X = \mathbb{Z} \cup (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$. Se prueba que F_1 despliega cada paso del operador impar de Collatz T en un descenso dentro de la fibra de T seguido de un puente, y que el descenso tiene longitud exacta $\lceil v_2(3m+1)/2 \rceil - 1$. El retorno de F_1 a los impares es una aplicación H de tres ramas afines, de factores $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{4}$, cuyas órbitas contienen como subsucesión las órbitas de T .

El resultado central es que F_2 es conjugada a H mediante $x \mapsto 4x+1$. En consecuencia, la convergencia de F_2 al 0 desde todo estado positivo equivale a la conjetura de Collatz. La normalización que fija los divisores de cada rama no elimina, pues, ninguna dificultad del problema: convierte la profundidad variable del colapso 2-ádico en un número variable de pasos.

1. Introducción

Se emplea la notación del escrito anterior de este capítulo [1]: T es el operador impar de Collatz, $\mathcal{M} = \{m \not\equiv 5 \pmod{8}\}$ la fila principal, $\mathcal{E} = \{m \equiv 5 \pmod{8}\}$ la fila complementaria y, para cada impar n coprimo con 3, la fibra $T^{-1}(n) = \{x_k\}_{k \geq 1}$ está generada desde la preimagen de colapso mínimo $x_1 = P(n) \in \mathcal{M}$ por $x_{k+1} = 4x_k + 1$. Se recuerda además que si $m = x_k$ entonces $v_2(3m+1)$ vale $2k$ o $2k-1$ según que n sea $\equiv 1$ o $\equiv 2 \pmod{3}$; en ambos casos

$$k = \left\lceil \frac{v_2(3m+1)}{2} \right\rceil.$$

Se introducen dos aplicaciones sobre el escenario extendido. La primera, F_1 , hace visibles los mecanismos del operador T por separado: el descenso dentro de una fibra y el paso de una fibra a la siguiente. La segunda, F_2 , fija los divisores de cada rama. El objetivo es determinar con exactitud qué relación guardan ambas con T .

2. El escenario extendido

Definición 2.1. Llamamos *escenario extendido* al conjunto $X = \mathbb{Z} \cup (\mathbb{Z} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Sus elementos son de tres tipos: enteros pares, enteros impares y semienteros.

Los semienteros no son un artificio: aparecen en cuanto se divide por 4 un impar $\equiv 3 \pmod{4}$, y ambas formulaciones los necesitan.

3. La Función 1: descenso en la fibra y puente

Definición 3.1 (Función 1).

$$F_1(x) = \begin{cases} 3x + 1, & x \in \mathbb{Z} \text{ par}, \\ \frac{x-1}{4}, & x \in \mathbb{Z} \text{ impar}, \\ 6x + 2, & x \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Lema 3.2 (Tipo de la imagen de un impar). *Sea m impar. Entonces $F_1(m) = (m-1)/4$ es*

1. *un entero impar si $m \equiv 5 \pmod{8}$, es decir si $m \in \mathcal{E}$;*
2. *un entero par si $m \equiv 1 \pmod{8}$;*
3. *un semientero si $m \equiv 3 \pmod{4}$.*

Además, las imágenes por F_1 de enteros pares y de semienteros son enteros impares.

Demostración. Si $m = 8j + 5$, $(m-1)/4 = 2j + 1$; si $m = 8j + 1$, $(m-1)/4 = 2j$; si $m = 4j + 3$, $(m-1)/4 = j + \frac{1}{2}$. Si x es par, $3x + 1$ es impar; si $x = j + \frac{1}{2}$, $6x + 2 = 6j + 5$ es impar. $\square$

Comentario 3.3. En particular, F_1 no actúa sobre $\mathbb{N}$ sin salir de él: produce semienteros sobre la clase $m \equiv 3 \pmod{4}$, que tiene densidad $\frac{1}{2}$ entre los impares. El escenario natural de F_1 es X .

La aplicación $x \mapsto (x-1)/4$ es la inversa del generador de fibras $x \mapsto 4x + 1$. Esto da el significado de F_1 .

Teorema 3.4 (Descomposición de un paso de T). *Sea m un impar positivo, $v = v_2(3m + 1)$ y $k = \lceil v/2 \rceil$, de modo que $m = x_k$ es el término de posición k de la fibra de $T(m)$. Entonces:*

1. $F_1^j(m) = x_{k-j}$ para $0 \leq j \leq k-1$, y todos esos términos son impares;
2. $F_1^k(m)$ es un entero par si $x_1 \equiv 1 \pmod{8}$ y un semientero si $x_1 \equiv 3 \pmod{4}$;
3. $F_1^{k+1}(m) = T(m)$.

El descenso dentro de la fibra tiene, por tanto, longitud exacta $k-1 = \lceil v_2(3m+1)/2 \rceil - 1$, y el puente hacia $T(m)$ consta de dos pasos.

Demostración. Como $x_{i+1} = 4x_i + 1$, se tiene $(x_{i+1} - 1)/4 = x_i$, lo que da el punto 1. Los x_i con $i \geq 2$ están en $\mathcal{E}$ y $x_1 \in \mathcal{M}$ [1], lo que, por el Lema 3.2, confirma que el descenso sólo se detiene en x_1 y da el punto 2.

Para el punto 3, si $x_1 = 8j + 1$ entonces $F_1(x_1) = 2j$ y $F_1(2j) = 6j + 1 = T(x_1)$; si $x_1 = 4j + 3$ entonces $F_1(x_1) = j + \frac{1}{2}$ y $F_1(j + \frac{1}{2}) = 6j + 5 = T(x_1)$. En ambos casos $T(x_1) = T(m)$, porque x_1 y m están en la misma fibra. $\square$

Ejemplo 3.5. Para $m = 229$ se tiene $3m + 1 = 688 = 2^4 \cdot 43$, luego $v = 4$, $k = 2$ y 229 es el segundo término de la fibra de 43. En efecto, $F_1(229) = 57$ (descenso), $F_1(57) = 14$ y $F_1(14) = 43$ (puente).

Observación 3.6 (Tipo del puente). El tipo del estado intermedio del puente depende sólo de la paridad de $v_2(3m+1)$: $F_1^k(m)$ es un semientero si $v_2(3m+1)$ es impar y un entero par si es par. Equivalentemente, el puente de m a $T(m)$ pasa por un semientero si y sólo si $T(m) \equiv 2 \pmod{3}$.

En particular, los semienteros que produce F_1 no son términos de la órbita de T : son, como los enteros pares intermedios, el estado intermedio de un puente entre dos impares consecutivos.

Demostración. Como $m = x_k$ y $x_{i+1} = 4x_i + 1$, se tiene $3x_{i+1} + 1 = 4(3x_i + 1)$, luego $v_2(3m+1) = v_2(3x_1+1) + 2(k-1)$, que tiene la paridad de $v_2(3x_1+1)$. Por el Teorema 3.4, el puente pasa por un semientero si $x_1 \equiv 3 \pmod{4}$, es decir si $v_2(3x_1+1) = 1$, y por un par si $x_1 \equiv 1 \pmod{8}$, es decir si $v_2(3x_1+1) = 2$. La equivalencia con $T(m) \pmod{3}$ es la relación entre $v_2(3m+1)$ y la clase de $T(m)$ módulo 3 recordada en la introducción. $\square$

Ejemplo 3.7 (La órbita de 23). La órbita de 23 bajo F_1 es

$$23, \frac{11}{2}, 35, \frac{17}{2}, 53, 13, 3, \frac{1}{2}, 5, 1, 0, 1, \dots$$

y recorre la órbita $23, 35, 53, 5, 1$ de T . Cada paso de T se descompone como indica el Teorema 3.4:

Paso de T	$v_2(3m+1)$	k	Descenso	Puente	$T(m) \pmod{3}$
$23 \rightarrow 35$	1	1	—	por 5,5	2
$35 \rightarrow 53$	1	1	—	por 8,5	2
$53 \rightarrow 5$	5	3	$53 \rightarrow 13 \rightarrow 3$	por 0,5	2
$5 \rightarrow 1$	4	2	$5 \rightarrow 1$	por 0	1

Los números 3, 13, 53 son los tres primeros términos de la fibra de 5, y 1, 5 los dos primeros de la fibra de 1. Los tres primeros puentes pasan por semienteros y el último por el entero par 0, de acuerdo con la Observación 3.6. En el último paso el 1 aparece dos veces: primero como $x_1 = P(1)$, final del descenso $5 \rightarrow 1$, y después como $T(5) = 1$, tras el puente $1 \rightarrow 0 \rightarrow 1$. La Figura 1 muestra la órbita sobre la tabla de los números $m \cdot 2^k$.

Observación 3.8 (Rachas de puentes por semientero y bloques triangulares). Llamamos paso $(0, s)$ a un paso de T sin descenso y con puente por semientero, es decir, con $v_2(3m+1) = 1$, o equivalentemente $m \equiv 3 \pmod{4}$. Sea A impar, $n = v_2(A+1)$, $A+1 = 2^n u$ con u impar, $B = 3^n u - 1$ y $r = v_2(B) \geq 1$. Entonces la órbita de A bajo T empieza con $n-1$ pasos $(0, s)$,

$$T^j(A) = 3^j 2^{n-j} u - 1, \quad 0 \leq j \leq n-1,$$

seguidos de un paso de valuación $v_2(3T^{n-1}(A)+1) = r+1 \geq 2$, que lleva a $T^n(A) = B/2^r$. Como cada impar inicia una racha de este tipo, toda órbita de T se descompone de manera única en rachas maximales de pasos $(0, s)$, de longitudes $v_2(A+1)-1$, cada una cerrada por un paso de valuación mayor o igual que 2. Estas rachas son exactamente los bloques triangulares de altura $n = v_2(A+1)$ de [2].

Demostración. Con $A_j = 3^j 2^{n-j} u - 1$ se tiene $3A_j + 1 = 3^{j+1} 2^{n-j} u - 2 = 2A_{j+1}$. Para $j \leq n-2$, A_{j+1} es impar, luego $v_2(3A_j+1) = 1$ y $T(A_j) = A_{j+1}$. Para $j = n-1$, $3A_{n-1} + 1 = 2A_n = 2B$, luego su valuación es $1+r$ y $T(A_{n-1}) = B/2^r$. $\square$

Ejemplo 3.9. Para $A = 23$ se tiene $n = v_2(24) = 3$ y $u = 3$: la órbita empieza con los dos pasos $(0, s)$ $23 \rightarrow 35 \rightarrow 53$, cuyos puentes son $\frac{11}{2}$ y $\frac{17}{2}$, y los cierra el paso $53 \rightarrow 5$, de valuación $5 = r + 1$, pues $B = 3^3 \cdot 3 - 1 = 80 = 2^4 \cdot 5$. Es la racha de las dos primeras filas de la tabla del Ejemplo 3.7, y corresponde al triángulo $24 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 9 \rightarrow 27 \rightarrow 81$ de altura 3.

	m impar																										
	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53
$k = 2$	4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	92	100	108	116	124	132	140	148	156	164	172	180	188	196	204	212
$k = 1$	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78	82	86	90	94	98	102	106
$k = 0$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53
$k = -1$	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5	11,5	12,5	13,5	14,5	15,5	16,5	17,5	18,5	19,5	20,5	21,5	22,5	23,5	24,5	25,5	26,5

Figura 1: Órbita de 23 bajo F_1 sobre el escenario extendido. Para hacer visible la geometría tabular, cada paso $m \mapsto (m - 1)/4$ se representa mediante dos movimientos auxiliares: de m a $m - 1$ (trazo discontinuo), seguido de un descenso de dos niveles desde $m - 1$. Los retornos impares de F_1 son 23, 35, 53, 13, 3, 5, 1. Los semienteros 5,5, 8,5 y 0,5 actúan como puentes, respectivamente, en $23 \rightarrow 35$, $35 \rightarrow 53$ y $3 \rightarrow 5$. El tramo $53 \rightarrow 13 \rightarrow 3$ es el descenso dentro de la fibra de 5, de modo que el paso $53 \rightarrow 5$ de T queda desplegado por F_1 como $53 \rightarrow 13 \rightarrow 3 \rightarrow 0,5 \rightarrow 5$. Análogamente, $5 \rightarrow 1$ es el descenso dentro de la fibra de 1. Eliminando los descensos internos de las fibras y los estados de puente se recupera la órbita del operador impar de Collatz, 23, 35, 53, 5, 1. El punto fijo $H(1) = 1$ corresponde en F_1 al ciclo $1 \rightarrow 0 \rightarrow 1$; el 0, al no poseer núcleo impar, queda fuera de la representación tabular por columnas.

3.1. El retorno a los impares

Por el Lema 3.2, desde cada impar la órbita de F_1 vuelve a un impar en uno o dos pasos. Esto define el *retorno impar* de F_1 .

Proposición 3.10 (Los tres regímenes). *Sea $H(m)$ el primer impar que la órbita de F_1 visita después de m . Entonces*

$$H(m) = \begin{cases} \frac{3m+1}{2}, & m \equiv 3 \pmod{4}, \\ \frac{3m+1}{4}, & m \equiv 1 \pmod{8}, \\ \frac{m-1}{4}, & m \equiv 5 \pmod{8}. \end{cases}$$

Demostración. Es la composición de los casos del Lema 3.2 con la rama correspondiente de F_1 : si $m = 4j + 3$, $H(m) = 6j + 5 = (3m + 1)/2$; si $m = 8j + 1$, $H(m) = 6j + 1 = (3m + 1)/4$; si $m = 8j + 5$, $H(m) = 2j + 1 = (m - 1)/4$. $\square$

Cuadro 1: Regímenes del retorno impar H .

Clase de m	$H(m)$	Factor asintótico	Densidad entre los impares
$m \equiv 3 \pmod{4}$	$(3m + 1)/2$	$3/2$	$1/2$
$m \equiv 1 \pmod{8}$	$(3m + 1)/4$	$3/4$	$1/4$
$m \equiv 5 \pmod{8}$	$(m - 1)/4$	$1/4$	$1/4$

Los dos primeros regímenes son pasos de T (con $v_2(3m+1) = 1$ y $= 2$); el tercero es un paso de descenso dentro de una fibra y no altera el valor de T . Sólo el primero es expansivo.

Comentario 3.11 (Corrección a la versión anterior). La versión anterior de este escrito daba como regímenes $3m-1$, $(3m-1)/2$ y $(m-3)/8$, mezclando en los cálculos la variable m con un parámetro n tal que $m = 2n-1$. Esas fórmulas no corresponden a F_1 . Además, calificaba de «contracción moderada» a $(3m-1)/2$, que es mayor que m para $m > 1$. Los regímenes correctos son los de la Proposición 3.10.

Corolario 3.12 (Las órbitas de H contienen las de T). *Sea m un impar positivo. La órbita de m bajo H contiene la órbita de m bajo T como subsucesión, y entre dos términos consecutivos m' y $T(m')$ de esta última hay exactamente $\lceil v_2(3m'+1)/2 \rceil$ pasos de H , cuyos valores intermedios están comprendidos entre $P(T(m'))$ y m' . En consecuencia:*

1. la órbita de m bajo H llega al 1 si y sólo si la llega la órbita bajo T ;
2. la órbita bajo H está acotada si y sólo si lo está la órbita bajo T ;
3. H tiene un ciclo en los impares positivos distinto de $\{1\}$ si y sólo si lo tiene T .

Demostración. Por el Teorema 3.4, desde $m' = x_k$ la órbita de H recorre $x_{k-1}, \dots, x_1$ y después $T(m')$: son k pasos por valores decrecientes entre m' y $x_1 = P(T(m'))$. Esto da la primera parte. Los puntos 1 y 2 se siguen de que las inserciones son finitas y están acotadas por el término de T que las precede, y de que $H(1) = 1$. Para el punto 3, un ciclo de T induce un ciclo de H que lo contiene; y recíprocamente, la órbita bajo T de un elemento de un ciclo de H toma un número finito de valores dentro de ese ciclo, luego desemboca en un ciclo de T contenido en él, que no puede ser $\{1\}$ salvo que el ciclo de H sea $\{1\}$, pues $H(1) = 1$. $\square$

4. La Función 2 y la conjugación

Definición 4.1 (Función 2).

$$F_2(x) = \begin{cases} \frac{3x}{4}, & x \in \mathbb{Z} \text{ par}, \\ \frac{x-1}{4}, & x \in \mathbb{Z} \text{ impar}, \\ \frac{6x+1}{4}, & x \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

A diferencia de F_1 , cada rama de F_2 lleva incorporado un divisor fijo: no hay pasos expansivos seguidos de un colapso de profundidad variable. El resultado siguiente muestra que, pese a ello, F_2 es la misma dinámica que el retorno impar de F_1 .

Teorema 4.2 (Conjugación). *La aplicación $\Phi(x) = 4x+1$ es una biyección de X sobre el conjunto de los enteros impares, que lleva los estados positivos de X a los impares ≥ 3 y el 0 al 1, y cumple*

$$\Phi \circ F_2 = H \circ \Phi.$$

Además, Φ lleva los enteros pares a la clase $m \equiv 1 \pmod{8}$, los enteros impares a la clase $m \equiv 5 \pmod{8}$ y los semienteros a la clase $m \equiv 3 \pmod{4}$.

Demostración. Como $X = \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $4x + 1$ recorre exactamente los impares. Si $x = 2j$, entonces $\Phi(x) = 8j + 1$ y $H(8j + 1) = 6j + 1 = 4 \cdot \frac{3x}{4} + 1$. Si $x = 2j + 1$, entonces $\Phi(x) = 8j + 5$ y $H(8j + 5) = 2j + 1 = 4 \cdot \frac{x-1}{4} + 1$. Si $x = j + \frac{1}{2}$, entonces $\Phi(x) = 4j + 3$ y $H(4j + 3) = 6j + 5 = 4 \cdot \frac{6x+1}{4} + 1$. $\square$

Corolario 4.3 (Equivalencia con la conjetura de Collatz). *Para todo estado positivo $x \in X$, la órbita de x bajo F_2 alcanza el 0 si y sólo si la órbita de $4x + 1$ bajo T alcanza el 1. En consecuencia, las afirmaciones*

1. *toda órbita positiva de F_2 alcanza el 0,*
2. *toda órbita del operador impar T alcanza el 1*

son equivalentes; y F_2 tiene órbitas positivas no acotadas, o ciclos positivos distintos del punto fijo 0, si y sólo si los tiene T .

Demostración. Por el Teorema 4.2, la órbita de x bajo F_2 es la imagen por Φ^{-1} de la órbita de $4x + 1$ bajo H , y $\Phi(0) = 1$. Basta aplicar el Corolario 3.12. Todo impar positivo es 1 o de la forma $4x + 1$ con $x > 0$ en X , luego la condición cubre a todos los impares. $\square$

Comentario 4.4 (Qué hace la normalización). El Teorema 4.2 precisa el efecto de fijar los divisores. En T , la profundidad $v_2(3m + 1)$ del colapso es variable y no acotada. En F_2 cada paso divide por una cantidad fija, y la profundidad reaparece como *número de pasos*: por el Corolario 3.12, un paso de T de profundidad v se convierte en $\lceil v/2 \rceil$ pasos de F_2 . Nada se pierde en la traducción.

Los tipos de estado de F_2 tienen, por la última parte del teorema, un significado preciso: un semientero corresponde a un paso de T con $v_2 = 1$, un entero par a un paso con $v_2 = 2$, y un entero impar a un paso de descenso dentro de una fibra. La versión anterior de este escrito relacionaba los semienteros con la clase $m \equiv 5 \pmod{8}$; la correspondencia correcta es con $m \equiv 3 \pmod{4}$.

Conviene no confundir este papel con el de la Observación 3.6: en F_1 un semientero es el estado intermedio de un puente, mientras que en F_2 es un estado que, vía Φ , representa a un impar $m \equiv 3 \pmod{4}$.

Ejemplo 4.5. Para $x = \frac{3}{2}$, es decir $m = 7$: la órbita bajo F_2 es $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 4, 3, \frac{1}{2}, 1, 0$, y su imagen por Φ es 7, 11, 17, 13, 3, 5, 1. Se reconoce la órbita 7, 11, 17, 13, 5, 1 de T con un paso de descenso insertado entre 13 y 5, pues 13 es el segundo término de la fibra de 5, cuyo primer término es 3.

5. Conclusión

Las dos formulaciones no separan mecanismos independientes del operador de Collatz: lo reescriben. F_1 despliega cada paso de T en un descenso dentro de su fibra, de longitud exacta $\lceil v_2(3m + 1)/2 \rceil - 1$, seguido de un puente de dos pasos; su retorno a los impares tiene tres regímenes, de factores $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}$ y $\frac{1}{4}$. F_2 es conjugada a ese retorno mediante $x \mapsto 4x + 1$.

La conclusión de la versión anterior de este escrito era que, al separar o normalizar los mecanismos, la complejidad característica de Collatz no se preserva. Es falsa: la convergencia global de F_2 equivale a la conjetura de Collatz (Corolario 4.3). Lo que la normalización cambia

es dónde queda registrada la dificultad: la profundidad variable del colapso 2-ádico pasa a ser una duración variable. El escrito siguiente estudia F_2 en forma entera y prueba sobre ella los resultados que admite, que deben leerse, en virtud de la conjugación, como resultados sobre una aceleración del operador de Collatz.

Referencias

- [1] M. Cerdá Bennassar, *Estructura de la fila principal y transiciones 2-ádicas del operador impar de Collatz*, collatz.es, 2026.
- [2] M. Cerdá Bennassar, *Estructura triangular y compresión de órbitas en la dinámica de Collatz*, collatz.es, 2026.
- [3] J. C. Lagarias (ed.), *The Ultimate Challenge: The $3x + 1$ Problem*, American Mathematical Society, 2010.