

Escrito 1

Periodicidad afín exacta de las distribuciones $m_n(r)$
y clasificación completa de su dominio fundamental

Miguel Cerdá Bennassar

Septiembre de 2026

Resumen

Para cada $n \geq 1$, la regularización de paridad $E \mapsto E$ (E impar), $E \mapsto E + 3^n$ (E par), aplicada a los enteros $1 \leq E < 3^n$ no divisibles por 3, define una multiplicidad $m_n(r)$ sobre las 128 clases impares r módulo 256. Se demuestra que esa regularización es una biyección sobre los impares $D < 2 \cdot 3^n$ coprimos con 3, lo que reduce $m_n(r)$ a un conteo de dos clases residuales módulo 768 en un único intervalo. De ahí se obtienen, sin ningún cálculo por casos ni verificación por ordenador: la periodicidad afín exacta

$$m_{n+32}(r) = m_n(r) + \frac{3^{n-1}(3^{32} - 1)}{64}$$

para todo $n \geq 1$ y todo r impar, su generalización a cualquier módulo 2^k con $k \geq 4$, y una clasificación explícita y completa de la distribución normalizada en función del único parámetro $u_n := 3^{n-1} \bmod 128$. En particular, $\max_r m_n(r) - \min_r m_n(r) = 2$ si y solo si $43 \leq u_n \leq 85$, y en ese caso exactamente 84 clases toman el valor intermedio.

1. Introducción

Para cada entero $n \geq 1$, los enteros $1 \leq E < 3^n$ no divisibles por 3 se distribuyen de forma desigual entre las clases residuales módulo 256. Esta nota estudia esa distribución mediante una regularización de paridad que concentra toda la información en las 128 clases impares:

$$\mathcal{D}_n(E) := \begin{cases} E, & E \text{ impar,} \\ E + 3^n, & E \text{ par.} \end{cases}$$

Como 3^n es impar, $\mathcal{D}_n(E)$ es siempre impar. Se define la multiplicidad

$$m_n(r) := \#\{E : 1 \leq E < 3^n, 3 \nmid E, \mathcal{D}_n(E) \equiv r \pmod{256}\}, \quad r \text{ impar.}$$

Escribiendo $U_n(\rho) := \#\{1 \leq E < 3^n : 3 \nmid E, E \equiv \rho \pmod{256}\}$ y $s_n := 3^n \bmod 256$, se tiene la expresión equivalente $m_n(r) = U_n(r) + U_n(r - s_n)$, donde el primer sumando cuenta los E impares de la clase r y el segundo los E pares que, al sumarles $3^n \equiv s_n$, caen en ella.

Para $n = 7$ ($3^7 = 2187$), la multiplicidad toma solo dos valores consecutivos, 11 y 12: exactamente 78 clases reciben el mínimo y 50 el máximo. La pregunta natural es qué ocurre para n arbitrario. La respuesta completa se obtiene de una observación elemental (Proposición 1): $\mathcal{D}_n$ transforma el problema en un conteo sobre un único intervalo.

Motivación. En la dinámica de Collatz intervienen a la vez las potencias de 3 y las de 2: tras k pasos de la aplicación T , de los cuales j son impares, la iteración es afín, $T^k(x) = (3^j x + c)/2^k$, y el comportamiento de estas aplicaciones sobre las clases residuales

depende de los restos de 3^j módulo potencias de 2. Esta nota estudia un aspecto concreto de esa interacción: cómo se reparten, entre las clases impares módulo 2^k , los representantes canónicos $1 \leq E < 3^n$ de las unidades módulo 3^n tras la regularización de paridad. Los resultados son de aritmética elemental y no tienen, por sí mismos, ninguna consecuencia sobre la conjetura de Collatz.

2. La biyección de regularización

Proposición 1. *Para todo $n \geq 1$, $\mathcal{D}_n$ es una biyección entre $\{1 \leq E < 3^n : 3 \nmid E\}$ y $\{1 \leq D < 2 \cdot 3^n : D \text{ impar}, 3 \nmid D\}$. En consecuencia,*

$$m_n(r) = \#\{1 \leq D < 2 \cdot 3^n : D \equiv r \pmod{256}, 3 \nmid D\}.$$

Demostración. Los E impares se aplican en sí mismos, cubriendo los impares de $[1, 3^n)$. Los E pares se aplican en $E + 3^n \in (3^n, 2 \cdot 3^n)$, que es impar, y $E \mapsto E + 3^n$ es una biyección entre los pares de $[1, 3^n)$ y los impares de $(3^n, 2 \cdot 3^n)$. Como $3 \mid 3^n$, $3 \nmid E$ si y solo si $3 \nmid E + 3^n$. El único impar de $[1, 2 \cdot 3^n)$ no alcanzado es 3^n , que es múltiplo de 3. Finalmente, $D \equiv r \pmod{256}$ con r impar ya fuerza que D sea impar, de modo que la condición de paridad es redundante en la fórmula final. $\square$

Corolario 2 (Conservación de la masa). $\sum_{r \text{ impar}} m_n(r) = \varphi(3^n) = 2 \cdot 3^{n-1}$.

3. Reducción a un conteo módulo 768

Como $256 \equiv 1 \pmod{3}$, para cada r impar con $1 \leq r \leq 255$ los tres levantamientos r , $r + 256$, $r + 512$ recorren las tres clases módulo 3, y exactamente uno es múltiplo de 3. Sea

$$\Lambda(r) := \{x \in \{r, r + 256, r + 512\} : 3 \nmid x\}, \quad \#\Lambda(r) = 2.$$

Así, $D \equiv r \pmod{256}$ y $3 \nmid D$ equivale a $D \pmod{768} \in \Lambda(r)$.

Definición 3. Para $n \geq 1$ se escribe $u_n := 3^{n-1} \pmod{128}$ y

$$2 \cdot 3^n = 768 Q_n + R_n, \quad 0 \leq R_n < 768.$$

Como $2 \cdot 3^n = 6 \cdot 3^{n-1}$ y $768 = 6 \cdot 128$, se tiene

$$Q_n = \left\lfloor \frac{3^{n-1}}{128} \right\rfloor, \quad R_n = 6 u_n.$$

En particular $R_n \equiv 0 \pmod{6}$, $R_n \neq 0$ (pues u_n es impar) y $R_n \notin \{256, 512\}$.

Lema 4 (Fórmula de conteo). *Para todo $n \geq 1$ y todo r impar, $1 \leq r \leq 255$,*

$$m_n(r) = 2Q_n + \#\{x \in \Lambda(r) : x < R_n\}.$$

Demostración. Se divide $[1, 2 \cdot 3^n)$ en los Q_n bloques completos $[768j + 1, 768(j + 1)]$, $0 \leq j < Q_n$, y el resto $[768Q_n + 1, 768Q_n + R_n - 1]$. Cada bloque completo contiene exactamente un representante de cada clase módulo 768, luego aporta $\#\Lambda(r) = 2$. En el resto, los enteros son $768Q_n + x$ con $1 \leq x \leq R_n - 1$, y se cuentan los que cumplen $x \in \Lambda(r)$. $\square$

4. Periodicidad afín exacta

Teorema 5 (Periodicidad afín exacta). *Para todo $n \geq 1$ y todo residuo impar r módulo 256,*

$$m_{n+32}(r) = m_n(r) + \frac{3^{n-1}(3^{32} - 1)}{64}.$$

Demostración. Como $\text{ord}_{128}(3) = 32$, se tiene $3^{32} \equiv 1$ (mód 128), luego $u_{n+32} = u_n$ y $R_{n+32} = R_n$. Por el Lema 4, el término $\#\{x \in \Lambda(r) : x < R_n\}$ es el mismo en n y en $n + 32$, y

$$m_{n+32}(r) - m_n(r) = 2(Q_{n+32} - Q_n) = 2 \cdot \frac{3^{n+31} - 3^{n-1}}{128} = \frac{3^{n-1}(3^{32} - 1)}{64},$$

donde la segunda igualdad usa que 3^{n+31} y 3^{n-1} tienen el mismo resto u_n módulo 128. $\square$

Observación 6. La igualdad $3^{32} \equiv 1$ (mód 128) se sigue de $3^{32} \equiv 129$ (mód 256) (cuadrados sucesivos: $3^8 \equiv 161$, $3^{16} \equiv 65$, $3^{32} \equiv 129$), o bien de $v_2(3^{2^m} - 1) = m + 2$ para $m \geq 1$, que con $m = 5$ da $v_2(3^{32} - 1) = 7$. En particular $3^{32} \equiv 1$ (mód 128) pero $3^{32} \not\equiv 1$ (mód 256), de modo que $\text{ord}_{128}(3) = 32$ y $\text{ord}_{256}(3) = 64$.

El mismo argumento funciona para cualquier potencia de 2.

Teorema 7 (Módulo 2^k general). *Sea $k \geq 4$, $P := 2^{k-3}$, y defínase $m_n^{(k)}(r)$ como $m_n(r)$ con 256 sustituido por 2^k . Entonces, para todo $n \geq 1$ y todo r impar,*

$$m_{n+P}^{(k)}(r) = m_n^{(k)}(r) + \frac{3^{n-1}(3^P - 1)}{2^{k-2}}.$$

Demostración. La Proposición 1 y el Lema 4 valen sin cambios con 768 sustituido por $3 \cdot 2^k$ y 128 por 2^{k-1} : el resto es $R_n = 6(3^{n-1} \text{ mód } 2^{k-1})$. Como $\text{ord}_{2^{k-1}}(3) = 2^{k-3} = P$ para $k \geq 4$, se tiene $R_{n+P} = R_n$, y la diferencia vale $2(Q_{n+P} - Q_n) = 2 \cdot \frac{3^{n-1}(3^P - 1)}{2^{k-1}}$. $\square$

5. Clasificación completa del dominio fundamental

Sea $e_n(r) := m_n(r) - \min_x m_n(x)$ la distribución normalizada, y sea $\Delta_n := \max_r e_n(r)$. Por el Lema 4, e_n depende de n solo a través de $R_n = 6u_n$, es decir, solo a través de $u_n = 3^{n-1} \text{ mód } 128$. El siguiente teorema la describe completamente.

Teorema 8 (Clasificación). *Sea $n \geq 1$ y $u := u_n = 3^{n-1} \text{ mód } 128$. Para r impar, $1 \leq r \leq 255$:*

- (A) *Si $u \leq 42$ (es decir, $R_n < 256$): $e_n(r) = 1[r < 6u, 3 \nmid r]$. Hay $2u$ clases con $e = 1$ y $128 - 2u$ con $e = 0$; $\Delta_n = 1$.*
- (B) *Si $43 \leq u \leq 85$ (es decir, $256 < R_n < 512$), con $t := 6u - 256$: $e_n(r) = 2$ si $r < t$ y $r \equiv 1 \pmod{6}$; $e_n(r) = 0$ si $r \geq t$ y $r \equiv 3 \pmod{6}$; $e_n(r) = 1$ en los demás casos. Hay $u - 42$ clases con $e = 2$, $86 - u$ con $e = 0$ y exactamente 84 con $e = 1$; $\Delta_n = 2$.*
- (C) *Si $u \geq 86$ (es decir, $R_n > 512$), con $t' := 6u - 512$: $e_n(r) = 1$ si $r < t'$ o $r \equiv 1 \pmod{6}$; $e_n(r) = 0$ en los demás casos. Hay $2u - 128$ clases con $e = 1$ y $256 - 2u$ con $e = 0$; $\Delta_n = 1$.*

Demostración. Sea $c_n(r) := \#\{x \in \Lambda(r) : x < R_n\}$. Se usa repetidamente que, para r impar, $r \equiv 1, 3, 5 \pmod{6}$ según $r \equiv 1, 0, 2 \pmod{3}$, y que $r + 256 \equiv r + 1$, $r + 512 \equiv r + 2 \pmod{3}$.

Caso (A). Como $R_n < 256$, solo el levantamiento $x = r$ puede ser menor que R_n , y pertenece a $\Lambda(r)$ si y solo si $3 \nmid r$. Así $c_n(r) = \mathbf{1}[r < R_n, 3 \nmid r]$. El valor 0 se alcanza (por ejemplo en $r = 3$), luego $e_n = c_n$. Entre los $3u$ impares menores que $R_n = 6u$ hay exactamente u múltiplos de 3, de modo que $\#\{e = 1\} = 2u \geq 2$.

Caso (B). Ahora $r < R_n$ siempre, $r + 512 \geq 512 > R_n$ nunca cuenta, y $r + 256 < R_n$ si y solo si $r < t$. Por tanto

$$c_n(r) = \mathbf{1}[3 \nmid r] + \mathbf{1}[r < t] \cdot \mathbf{1}[3 \nmid r + 256] = \mathbf{1}[r \not\equiv 0] + \mathbf{1}[r < t] \cdot \mathbf{1}[r \not\equiv 2] \pmod{3}.$$

Si $r \geq t$: $c_n(r) = 0$ para $r \equiv 0$ y 1 en otro caso. Si $r < t$: $c_n(r) = 2$ para $r \equiv 1$ y 1 para $r \equiv 0, 2$. El valor 0 se alcanza en $r = 255$ (pues $t \leq 6 \cdot 85 - 256 = 254$), así que $e_n = c_n$. Escribiendo $t = 6(u - 43) + 2$, los $r \equiv 1 \pmod{6}$ menores que t son $1, 7, \dots, 6(u - 43) + 1$, en número $u - 42 \geq 1$; los $r \equiv 3 \pmod{6}$ con $t \leq r \leq 255$ son $6i + 3$ con $u - 43 \leq i \leq 42$, en número $86 - u$. El resto, $128 - (u - 42) - (86 - u) = 84$, tiene $e = 1$.

Caso (C). Ahora $r, r + 256 < R_n$ siempre, y $r + 512 < R_n$ si y solo si $r < t'$. Si $r < t'$, los tres levantamientos cuentan y $c_n(r) = 2$. Si $r \geq t'$, falta solo $r + 512$, que está en $\Lambda(r)$ si y solo si $r \not\equiv 1 \pmod{3}$; así $c_n(r) = 2$ para $r \equiv 1$ y 1 en otro caso. El valor 1 se alcanza en $r = 255$ (pues $t' \leq 6 \cdot 127 - 512 = 250$), luego $e_n = c_n - 1$. Escribiendo $t' = 6j + 4$ con $j = u - 86$, hay $3j + 2$ impares menores que t' , y los $r \equiv 1 \pmod{6}$ con $t' \leq r \leq 255$ son $6i + 1$ con $j + 1 \leq i \leq 42$, en número $42 - j$. En total, $\#\{e = 1\} = 2j + 44 = 2u - 128 \geq 44$. $\square$

Corolario 9 (Los once casos con $\Delta_n = 2$). $\Delta_n = 2$ si y solo si $43 \leq 3^{n-1} \pmod{128} \leq 85$. En el bloque $n = 32, \dots, 63$ esto ocurre exactamente para

$$n \equiv 0, 5, 14, 17, 18, 19, 22, 24, 28, 29, 31 \pmod{32},$$

y en todos ellos el número de clases con $e_n(r) = 1$ es 84.

Corolario 10 (Periodo mínimo). La distribución normalizada $(e_n(r))_r$ tiene periodo exactamente 32 en n . En efecto, depende solo de u_n , que tiene periodo 32; y no tiene periodo 16, pues $\Delta_{32} = 2$ ($u = 43$) mientras que $\Delta_{48} = 1$ ($u = 107$). Todo divisor propio de 32 divide a 16.

Ejemplo 11. Para $n = 7$: $u_7 = 3^6 \pmod{128} = 89$, caso (C). Hay $2 \cdot 89 - 128 = 50$ clases con el valor máximo y $256 - 178 = 78$ con el mínimo. Con $Q_7 = \lfloor 729/128 \rfloor = 5$, los valores son $2Q_7 + 1 = 11$ y $2Q_7 + 2 = 12$.

Tabla del dominio fundamental

La tabla siguiente recoge, para $n = 32 + k$ con $0 \leq k \leq 31$, el residuo $s_n = 3^n \pmod{256}$, el parámetro u_n , el caso del Teorema 8, Δ_n y el número de clases con cada valor de e_n . Todas las entradas se obtienen de las fórmulas cerradas del Teorema 8.

k	s_n	u_n	caso	Δ_n	$e=0$	$e=1$	$e=2$
0	129	43	B	2	43	84	1
1	131	1	A	1	126	2	–
2	137	3	A	1	122	6	–
3	155	9	A	1	110	18	–
4	209	27	A	1	74	54	–
5	115	81	B	2	5	84	39
6	89	115	C	1	26	102	–
7	11	89	C	1	78	50	–
8	33	11	A	1	106	22	–
9	99	33	A	1	62	66	–
10	41	99	C	1	58	70	–
11	123	41	A	1	46	82	–
12	113	123	C	1	10	118	–
13	83	113	C	1	30	98	–
14	249	83	B	2	3	84	41
15	235	121	C	1	14	114	–

k	s_n	u_n	caso	Δ_n	$e=0$	$e=1$	$e=2$
16	193	107	C	1	42	86	–
17	67	65	B	2	21	84	23
18	201	67	B	2	19	84	25
19	91	73	B	2	13	84	31
20	17	91	C	1	74	54	–
21	51	17	A	1	94	34	–
22	153	51	B	2	35	84	9
23	203	25	A	1	78	50	–
24	97	75	B	2	11	84	33
25	35	97	C	1	62	66	–
26	105	35	A	1	58	70	–
27	59	105	C	1	46	82	–
28	177	59	B	2	27	84	17
29	19	49	B	2	37	84	7
30	57	19	A	1	90	38	–
31	171	57	B	2	29	84	15

6. Observaciones finales

Observación 12 (Qué parámetro gobierna la distribución). Toda la estructura de $m_n(r)$ está controlada por la posición de $R_n = 2 \cdot 3^n$ mód 768 respecto de los cortes 256 y 512. La periodicidad 32 es simplemente el periodo de 3^{n-1} módulo 128, y la constante afín es el número de bloques completos de longitud 768 que se añaden al pasar de $2 \cdot 3^n$ a $2 \cdot 3^{n+32}$. Los valores que toma u_n son los 32 elementos del subgrupo $\langle 3 \rangle \subset (\mathbb{Z}/128\mathbb{Z})^\times$, es decir, los residuos $\equiv 1$ o 3 (mód 8).

Observación 13 (El invariante 84). En el caso (B), la cantidad

$$\#\{r < t : r \equiv 1 \pmod{6}\} + \#\{r \geq t : r \equiv 3 \pmod{6}\}$$

no varía al desplazar t en 6 unidades: cada paso añade un $r \equiv 1$ al primer conjunto y retira un $r \equiv 3$ del segundo. Como además $t \equiv 2 \pmod{6}$ siempre, esa cantidad vale siempre 44, y $128 - 44 = 84$.

Problema 14. Extender el Teorema 8 a módulos 2^k arbitrarios. Los ingredientes son los mismos, pero para k impar se tiene $2^k \equiv 2 \pmod{3}$, los cortes caen en clases distintas módulo 6, y aparecen casos frontera en los extremos del régimen central que no se presentan para $k = 8$.

A. Código de comprobación

La demostración anterior no requiere cálculo. El siguiente programa (Python 3) sirve como control independiente: contrasta la fórmula de conteo con la definición original $U_n(r) + U_n(r - s_n)$ por enumeración directa para $n \leq 11$, y las fórmulas del Teorema 8 con el Lema 4 para $1 \leq n < 70$.

```
def U(n, rho, mod=256):
    return sum(1 for E in range(rho, 3**n, mod) if E % 3)

def m_def(n, r, mod=256):
    x = (r - pow(3, n, mod)) % mod or mod
    return U(n, r, mod) + U(n, x, mod)
```

```

def m_conteo(n, r, mod=256):
    Q, R = divmod(2 * 3**n, 3 * mod)
    return 2*Q + sum(1 for x in (r, r+mod, r+2*mod) if x % 3 and x < R)

def clasif(n):
    u = pow(3, n - 1, 128)
    if u <= 42: return (1, 128 - 2*u, 2*u, 0)
    if u <= 85: return (2, 86 - u, 84, u - 42)
    return (1, 256 - 2*u, 2*u - 128, 0)

assert all(m_def(n, r) == m_conteo(n, r)
           for n in range(1, 12) for r in range(1, 256, 2))
for n in range(1, 70):
    v = [m_conteo(n, r) for r in range(1, 256, 2)]
    e = [x - min(v) for x in v]
    assert (max(e), e.count(0), e.count(1), e.count(2)) == clasif(n)
print("OK")

```