

Escrito 2

Clasificación completa de las distribuciones $m_n^{(k)}(r)$
para todo módulo 2^k

Miguel Cerdá Bennassar

Septiembre de 2026

Resumen

En el Escrito 1 se demostró que la multiplicidad $m_n(r)$, definida por regularización de paridad sobre los enteros $1 \leq E < 3^n$ coprimos con 3, se reduce a un conteo de dos clases residuales en un único intervalo, y se clasificó por completo su distribución normalizada módulo 256. Esta nota extiende la clasificación a todo módulo 2^k con $k \geq 4$. La distribución depende únicamente de $u_n := 3^{n-1} \pmod{2^{k-1}}$ y cae en uno de tres regímenes según la posición de $6u_n$ respecto de 2^k y 2^{k+1} . En el régimen central la oscilación máxima es exactamente 2, y el número de clases con valor intermedio es la constante $4J_{k-2} = (2^k - 4(-1)^k)/3$, donde J denota la sucesión de Jacobsthal. De los 2^{k-3} exponentes de cada periodo, exactamente J_{k-3} pertenecen a ese régimen. Los casos frontera que podrían romper la clasificación para k impar quedan excluidos por una congruencia módulo 12.

1. Introducción

Sea $k \geq 4$ y $M := 2^k$. Para cada $n \geq 1$ y cada residuo impar r módulo M se define, como en el Escrito 1,

$$m_n^{(k)}(r) := \#\{E : 1 \leq E < 3^n, 3 \nmid E, \mathcal{D}_n(E) \equiv r \pmod{M}\},$$
$$\mathcal{D}_n(E) := \begin{cases} E, & E \text{ impar}, \\ E + 3^n, & E \text{ par}. \end{cases}$$

Para $k = 8$ el Escrito 1 obtuvo la periodicidad afín exacta con periodo 32 y una clasificación explícita de la distribución normalizada en tres regímenes, con el invariante 84 en el régimen central. Aquí se muestra que toda esa estructura es un caso particular de una clasificación uniforme en k , y se identifican los valores generales del invariante y del número de exponentes con oscilación 2. Para la motivación de este estudio, véase el Escrito 1.

2. Planteamiento general

La biyección de regularización del Escrito 1 (Proposición 1) no depende del módulo: $\mathcal{D}_n$ aplica biyectivamente $\{1 \leq E < 3^n : 3 \nmid E\}$ en los impares $1 \leq D < 2 \cdot 3^n$ con $3 \nmid D$. En consecuencia,

$$m_n^{(k)}(r) = \#\{1 \leq D < 2 \cdot 3^n : D \equiv r \pmod{M}, 3 \nmid D\}.$$

Para r impar con $1 \leq r \leq M - 1$, los tres levantamientos $r, r + M, r + 2M$ recorren las tres clases módulo 3, pues $M \not\equiv 0 \pmod{3}$. Se escribe

$$\Lambda(r) := \{x \in \{r, r + M, r + 2M\} : 3 \nmid x\}, \quad \#\Lambda(r) = 2.$$

Definición 1. Para $n \geq 1$ se definen

$$u_n := 3^{n-1} \pmod{2^{k-1}}, \quad 2 \cdot 3^n = 3M Q_n + R_n, \quad 0 \leq R_n < 3M.$$

Como $2 \cdot 3^n = 6 \cdot 3^{n-1}$ y $3M = 6 \cdot 2^{k-1}$, se tiene $R_n = 6u_n$ y $Q_n = \lfloor 3^{n-1}/2^{k-1} \rfloor$.

Lema 2 (Conteo). Para todo $n \geq 1$ y todo r impar, $1 \leq r \leq M-1$,

$$m_n^{(k)}(r) = 2Q_n + c_n(r), \quad c_n(r) := \#\{x \in \Lambda(r) : x < R_n\}.$$

Demostración. Idéntica a la del Escrito 1 (Lema 4): cada uno de los Q_n bloques completos de longitud $3M$ aporta un representante de cada clase de $\Lambda(r)$, y en el resto $[3MQ_n + 1, 3MQ_n + R_n - 1]$ se cuentan los $x \in \Lambda(r)$ con $x < R_n$. $\square$

Lema 3 (El parámetro u_n). (i) Los valores de u_n son exactamente los 2^{k-3} enteros $1 \leq u < 2^{k-1}$ con $u \equiv 1$ o $3 \pmod{8}$, y u_n es periódica en n con periodo exacto $P := 2^{k-3}$.

(ii) $6u_n \equiv 6 \pmod{12}$, y $M \equiv 4 \pmod{12}$ si k es par, $M \equiv 8 \pmod{12}$ si k es impar.

Demostración. (i) Es el hecho clásico de que, para $j \geq 3$, 3 genera en $(\mathbb{Z}/2^j\mathbb{Z})^\times$ el subgrupo de orden 2^{j-2} formado por las clases $\equiv 1, 3 \pmod{8}$; se aplica con $j = k-1 \geq 3$. (ii) u_n es impar, luego $6u_n \equiv 6 \pmod{12}$. Para $k \geq 2$, $2^k \equiv 0 \pmod{4}$ y $2^k \equiv (-1)^k \pmod{3}$, lo que da 4 o 8 módulo 12 según la paridad de k . $\square$

Observación 4. La periodicidad afín del Escrito 1 (Teorema 7) se lee directamente aquí: como $R_{n+P} = R_n$, se tiene $m_{n+P}^{(k)}(r) - m_n^{(k)}(r) = 2(Q_{n+P} - Q_n) = 3^{n-1}(3^P - 1)/2^{k-2}$.

3. Teorema de clasificación

Sea $e_n(r) := m_n^{(k)}(r) - \min_x m_n^{(k)}(x)$ la distribución normalizada, $\Delta_n := \max_r e_n(r)$, y

$$e_k^* := \frac{2^k - 4(-1)^k}{3}.$$

Teorema 5 (Clasificación general). Sean $k \geq 4$, $M = 2^k$, $n \geq 1$ y $u := u_n$. Entonces se da exactamente uno de los tres casos siguientes.

(A) $6u < M$. Entonces $\Delta_n = 1$, con $\#\{e = 1\} = 2u$ y $\#\{e = 0\} = M/2 - 2u$.

(B) $M < 6u < 2M$. Entonces $\Delta_n = 2$, con

$$\#\{e = 2\} = u - \frac{1}{2}e_k^*, \quad \#\{e = 1\} = e_k^*, \quad \#\{e = 0\} = \frac{M}{2} - \frac{1}{2}e_k^* - u.$$

(C) $6u > 2M$. Entonces $\Delta_n = 1$, con $\#\{e = 1\} = 2u - M/2$ y $\#\{e = 0\} = M - 2u$.

Además, en cada caso las clases se describen explícitamente. Sea $\beta_k \in \{1, 5\}$ el residuo módulo 6 de los impares r con $r \equiv M \pmod{3}$; es decir, $\beta_k = 1$ si k es par y $\beta_k = 5$ si k es impar. Entonces:

(A) $e_n(r) = 1$ si y solo si $r < 6u$ y $3 \nmid r$.

(B) Con $t := 6u - M$: $e_n(r) = 2$ si y solo si $r < t$ y $r \equiv \beta_k \pmod{6}$; $e_n(r) = 0$ si y solo si $r \geq t$ y $r \equiv 3 \pmod{6}$.

(C) Con $t' := 6u - 2M$: $e_n(r) = 1$ si y solo si $r < t'$ o $r \equiv \beta_k \pmod{6}$.

Los casos son exhaustivos, pues $6u \notin \{M, 2M\}$: $6u$ es múltiplo de 3.

Demostración. Se usa que $r + 2M \equiv r - M \pmod{3}$ y que, para r impar, la condición $r + 2M \equiv 0 \pmod{3}$ equivale a $r \equiv M \pmod{3}$, es decir, a $r \equiv \beta_k \pmod{6}$.

Caso (A). Como $R_n = 6u < M$, solo $x = r$ puede ser menor que R_n , y $c_n(r) = \mathbf{1}[r < 6u, 3 \nmid r]$. Entre los $3u$ impares menores que $6u$ hay u múltiplos de 3, luego $\#\{c = 1\} = 2u \geq 2$ y $\#\{c = 0\} = M/2 - 2u \geq 1$. Así $e_n = c_n$ y $\Delta_n = 1$.

Caso (B). Ahora $r < R_n$ siempre, $r + 2M \geq 2M > R_n$ nunca cuenta, y $r + M < R_n$ si y solo si $r < t$. Por tanto

$$c_n(r) = \mathbf{1}[3 \nmid r] + \mathbf{1}[r < t] \cdot \mathbf{1}[3 \nmid r + M].$$

Si $r \geq t$, $c_n(r) \in \{0, 1\}$, y vale 0 exactamente cuando $3 \mid r$, es decir, $r \equiv 3 \pmod{6}$. Si $r < t$, $c_n(r) \in \{1, 2\}$, y vale 2 exactamente cuando ni r ni $r + M$ son múltiplos de 3, es decir, cuando el múltiplo de 3 del trío es $r + 2M$: $r \equiv \beta_k \pmod{6}$. Queda contar ambos conjuntos, lo que requiere distinguir la paridad de k . Por el Lema 3(ii), $t = 6u - M$ satisface $t \equiv 2 \pmod{12}$ si k es par y $t \equiv 10 \pmod{12}$ si k es impar.

k par ($M \equiv 4 \pmod{6}$), $\beta_k = 1$, $e_k^* = (M - 4)/3$. Escribese $t = 6j + 2$ con $j \geq 0$. Los $r \equiv 1 \pmod{6}$ menores que t son $1, 7, \dots, 6j + 1$, en número $j + 1$. Los $r \equiv 3 \pmod{6}$ con $t \leq r \leq M - 1$ son $6i + 3$ con $j \leq i \leq (M - 4)/6$ (pues $M - 1 \equiv 3 \pmod{6}$), en número $(M + 2)/6 - j$. Ambos son ≥ 1 , pues $t \leq M - 2$. Sustituyendo $j = u - (M + 2)/6$ se obtiene

$$\#\{c = 2\} = u - \frac{M-4}{6}, \quad \#\{c = 0\} = \frac{M+2}{3} - u.$$

k impar ($M \equiv 2 \pmod{6}$), $\beta_k = 5$, $e_k^* = (M + 4)/3$. Escribese $t = 6j + 4$. Los $r \equiv 5 \pmod{6}$ menores que t son $5, 11, \dots, 6j - 1$, en número j . Los $r \equiv 3 \pmod{6}$ con $t \leq r \leq M - 1$ son $6i + 3$ con $j + 1 \leq i \leq (M - 8)/6$ (pues el mayor de ellos es $M - 5$), en número $(M - 8)/6 - j$. Aquí la congruencia módulo 12 es esencial: da $t \geq 10$, luego $j \geq 1$, y $t \leq M - 10$ (porque $t < M$ y $t \equiv 10$, $M \equiv 8 \pmod{12}$), luego $(M - 8)/6 - j \geq 1$. Sustituyendo $j = u - (M + 4)/6$,

$$\#\{c = 2\} = u - \frac{M+4}{6}, \quad \#\{c = 0\} = \frac{M-2}{3} - u.$$

En ambas paridades, los dos valores extremos 0 y 2 se alcanzan, luego $e_n = c_n$ y $\Delta_n = 2$. Las dos fórmulas se escriben de forma unificada como $\#\{e = 2\} = u - e_k^*/2$ y $\#\{e = 0\} = M/2 - e_k^*/2 - u$, y por diferencia $\#\{e = 1\} = M/2 - \#\{e = 0\} - \#\{e = 2\} = e_k^*$.

Caso (C). Ahora $r, r + M < R_n$ siempre, y $r + 2M < R_n$ si y solo si $r < t'$. Si $r < t'$ los tres levantamientos cuentan y $c_n(r) = 2$. Si $r \geq t'$ falta solo $r + 2M$, de modo que $c_n(r) = 2$ si $r + 2M$ es el múltiplo de 3 del trío ($r \equiv \beta_k \pmod{6}$) y $c_n(r) = 1$ en otro caso. Por el Lema 3(ii), $t' \equiv 10 \pmod{12}$ si k es par y $t' \equiv 2 \pmod{12}$ si k es impar.

k par. Con $t' = 6j + 4$: hay $3j + 2$ impares menores que t' , y los $r \equiv 1 \pmod{6}$ con $t' \leq r \leq M - 1$ son $6i + 1$ con $j + 1 \leq i \leq (M - 4)/6$, en número $(M - 4)/6 - j$. Con $j = u - (M + 2)/3$, el total es $2j + (M + 8)/6 = 2u - M/2$.

k impar. Con $t' = 6j + 2$: hay $3j + 1$ impares menores que t' , y los $r \equiv 5 \pmod{6}$ con $t' \leq r \leq M - 1$ son $6i + 5$ con $j \leq i \leq (M - 8)/6$, en número $(M - 2)/6 - j$. Con $j = u - (M + 1)/3$, el total es $2j + (M + 4)/6 = 2u - M/2$.

En ambos casos $\#\{c = 2\} = 2u - M/2 \geq 1$ (pues $u > M/3$) y $\#\{c = 1\} = M - 2u \geq 1$ (pues $u < M/2$). Así $e_n = c_n - 1$ y $\Delta_n = 1$. $\square$

Observación 6 (Los casos frontera). En el caso (B) con k impar, la clasificación podría romperse en dos situaciones extremas: $t = 4$, en la que no existiría ningún $r < t$ con $r \equiv 5 \pmod{6}$ y el valor 2 no se alcanzaría; y $t = M - 4$, en la que no existiría ningún $r \geq t$ múltiplo de 3 y el valor 0 no se alcanzaría. Ambas darían $\Delta_n = 1$ en pleno régimen central. Las dos quedan excluidas porque u_n es impar: $t \equiv 10 \pmod{12}$, mientras que $4 \equiv 4$ y $M - 4 \equiv 4 \pmod{12}$. Para k par los extremos correspondientes no requieren este argumento.

4. Consecuencias

Corolario 7 (Criterio de oscilación). $\Delta_n = 2$ si y solo si $2^k/6 < 3^{n-1} \pmod{2^{k-1}} < 2^k/3$.

Corolario 8 (El invariante central). En el régimen central, el número de clases con valor intermedio es

$$e_k^* = \frac{2^k - 4(-1)^k}{3} = 4J_{k-2},$$

donde $J_m := (2^m - (-1)^m)/3$ es la sucesión de Jacobsthal $(0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, \dots)$. Para $k = 8$ se recupera $e_8^* = 4 \cdot 21 = 84$.

Proposición 9 (Cuántos exponentes tienen oscilación 2). En cada periodo de $P = 2^{k-3}$ exponentes consecutivos, exactamente J_{k-3} tienen $\Delta_n = 2$.

Demostración. Por el Lema 3(i), cada $u \equiv 1, 3 \pmod{8}$ con $1 \leq u < 2^{k-1}$ aparece exactamente una vez por periodo. Hay que contar los de ese tipo en el intervalo $(2^k/6, 2^k/3)$, que está contenido en $[1, 2^{k-1})$. Sea $N := 2^{k-4}$, de modo que el intervalo es $(8N/3, 16N/3)$ y $P = 2N$.

Para $k = 4$ ($N = 1$), el intervalo es $(8/3, 16/3)$ y contiene solo $u = 3$: el recuento es $1 = J_1$.

Si $N = 3m + 1$ con $m \geq 1$ (k par, $k \geq 6$), el intervalo contiene los enteros $8m + 3, \dots, 16m + 5$. En el bloque $8m + 1, \dots, 8m + 8$ solo aparece $8m + 3$. Los $m - 1$ bloques completos $8i + 1, \dots, 8i + 8$ con $m + 1 \leq i \leq 2m - 1$ aportan 2 cada uno. En el tramo final $16m + 1, \dots, 16m + 5$ aparecen $16m + 1$ y $16m + 3$. En total, $2m + 1 = (P + 1)/3 = J_{k-3}$.

Si $N = 3m + 2$ con $m \geq 0$ (k impar), el intervalo contiene los enteros de $8m + 6$ a $16m + 10$. El tramo inicial $8m + 6, 8m + 7, 8m + 8$ no aporta ninguno. Los m bloques completos $8i + 1, \dots, 8i + 8$ con $m + 1 \leq i \leq 2m$ aportan 2 cada uno. En el tramo final $16m + 9, 16m + 10$ aparece solo $16m + 9$. En total, $2m + 1 = (P - 1)/3 = J_{k-3}$. $\square$

Corolario 10 (Periodo mínimo). Para todo $k \geq 4$, la distribución normalizada $(e_n(r))_r$ tiene periodo exacto $P = 2^{k-3}$ en n .

Demostración. Depende solo de u_n , que tiene periodo P . Basta ver que Δ_n no tiene periodo $P/2$, pues todo divisor propio de P divide a $P/2$. Para $k = 4$, u_n alterna entre 1 (caso A) y 3 (caso B). Para $k \geq 5$, $v_2(3^{2^{k-4}} - 1) = k - 2$ da $3^{P/2} \equiv 1 + 2^{k-2} \pmod{2^{k-1}}$, y como u_n es impar, $u_{n+P/2} \equiv u_n + M/4 \pmod{M/2}$. Si u_n está en el intervalo central $(M/6, M/3)$, entonces $u_n + M/4 \in (5M/12, 7M/12)$. Si es menor que $M/2$, entonces $u_{n+P/2} = u_n + M/4 > M/3$. Si no, $u_{n+P/2} = u_n - M/4 < M/12$. En ambos casos queda fuera del intervalo central. Como el intervalo central contiene algún u_n (Proposición 9, $J_{k-3} \geq 1$), existe n con $\Delta_n = 2$ y $\Delta_{n+P/2} = 1$. $\square$

Tabla

Para $4 \leq k \leq 13$: el módulo M , el periodo P , el número de exponentes por periodo en cada régimen y el invariante central e_k^* . La columna (B) es J_{k-3} ; las columnas (A) y (C) se obtienen contando los $u \equiv 1, 3 \pmod{8}$ en los intervalos correspondientes.

k	M	P	(A)	(B)	(C)	e_k^*
4	16	2	1	1	0	4
5	32	4	2	1	1	12
6	64	8	3	3	2	20
7	128	16	6	5	5	44
8	256	32	11	11	10	84
9	512	64	22	21	21	172
10	1024	128	43	43	42	340
11	2048	256	86	85	85	684
12	4096	512	171	171	170	1364
13	8192	1024	342	341	341	2732

5. Observaciones finales

Observación 11. Para $k = 8$ el Teorema 5 reproduce exactamente la clasificación del Escrito 1: los cortes $6u = 256$ y $6u = 512$ corresponden a $u \leq 42$ y $u \geq 86$, y $J_5 = 11$ es el número de exponentes con $\Delta_n = 2$ en el dominio fundamental.

Observación 12. La única diferencia estructural entre k par y k impar es el residuo β_k de la clase de levantamientos que decide el valor 2, es decir, el signo de $2^k \equiv (-1)^k \pmod{3}$. Ese signo es también el que aparece en la fórmula de e_k^* y en la paridad de la sucesión de Jacobsthal.

Problema 13. La biyección de regularización funciona para cualquier base impar b en lugar de 3: $\mathcal{D}_n(E) = E + b^n$ conserva la condición $b \nmid E$ cuando b es primo. El conteo pasa a hacerse módulo $b \cdot 2^k$, con $b - 1$ levantamientos admisibles de cada r en vez de 2, y el parámetro natural es $b^{n-1} \pmod{2^{k-1}}$. Queda por determinar cómo se generalizan los tres regímenes, el invariante central y el recuento de exponentes con oscilación máxima.

A. Código de comprobación

Control independiente, no necesario para las demostraciones: contrasta el Teorema 5 con el Lema 2 para $4 \leq k \leq 11$ y $1 \leq n < 2P + 5$, y la Proposición 9 con la sucesión de Jacobsthal.

```
def conteo(n, r, M):
    Q, R = divmod(2 * 3**n, 3 * M)
    return 2*Q + sum(1 for x in (r, r+M, r+2*M) if x % 3 and x < R)

def clasif(n, k):
    M = 2**k; u = pow(3, n - 1, M // 2)
    es = (M - 4 * (-1)**k) // 3
    if 6*u < M: return (1, M//2 - 2*u, 2*u, 0)
    if 6*u < 2*M: return (2, M//2 - es//2 - u, es, u - es//2)
    return (1, M - 2*u, 2*u - M//2, 0)

J = lambda m: (2**m - (-1)**m) // 3
for k in range(4, 12):
    M, P = 2**k, 2**(k - 3)
    for n in range(1, 2*P + 5):
        v = [conteo(n, r, M) for r in range(1, M, 2)]
        e = [x - min(v) for x in v]
```

```
    assert (max(e), e.count(0), e.count(1), e.count(2)) == clasif(n, k)
    us = [pow(3, n - 1, M // 2) for n in range(1, P + 1)]
    assert sum(M < 6*u < 2*M for u in us) == J(k - 3)
print("OK")
```