

Las funciones g_k como acción multiplicativa: estructura cíclica completa

Miguel Cerdà Bennassar

Julio de 2025 (revisión de septiembre de 2026)

Resumen

Se caracteriza por completo la estructura dinámica de las funciones $g_k(n) = n/2$ si n es par y $g_k(n) = (n+k)/2$ si n es impar. Se prueba que, para k impar, g_k es una biyección de $\{1, \dots, k-1\}$ que actúa como multiplicación por 2^{-1} módulo k , y que su restricción a los múltiplos de un divisor d de k es exactamente $d \cdot g_{k/d}$. De esta autosemejanza se obtiene la estructura cíclica completa: para cada divisor $d < k$, los elementos con $\gcd(n, k) = d$ forman $\varphi(k/d)/\text{ord}_{k/d}(2)$ ciclos de longitud $\text{ord}_{k/d}(2)$. La descripción se verifica sobre los casos $k = 85, 91, 95, 105, 135, 231$.

Para k par la función no está definida sobre ningún impar, de modo que el estudio se reduce al caso impar. Se obtiene, como aplicación, una caracterización dinámica del conjunto de Artin $S(2)$. Una sección final delimita la relación con las dinámicas de tipo Collatz, que es menor de lo que el nombre sugiere.

1. Introducción

Las funciones que estudiamos combinan una división por dos con un desplazamiento fijo. A diferencia de la iteración de Collatz, no contienen ningún factor expansivo, y veremos que esa ausencia es decisiva: toda la dinámica se reduce a una acción de grupo sobre un conjunto finito y queda completamente determinada por teoría elemental de grupos.

Definición 1.1 (La familia g_k). Para $k \in \mathbb{N}$ se define

$$g_k(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \equiv 0 \pmod{2}, \\ \frac{n+k}{2}, & n \equiv 1 \pmod{2} \text{ y } n+k \text{ par}, \end{cases}$$

sobre el dominio $D_k = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ par}\} \cup \{n \text{ impar} : n+k \text{ par}\}$.

Observación 1.2 (Dominio). La condición $n+k$ par, con n impar, equivale a que k sea impar. Por tanto:

- si k es impar, $D_k = \mathbb{N}$;
- si k es par, D_k es el conjunto de los pares, y ningún impar tiene imagen.

Proposición 1.3 (Reducción al caso impar). *Si k es par, la iteración de g_k desde cualquier $n \in \mathbb{N}$ se detiene: tras $v_2(n)$ pasos se alcanza la parte impar de n , que no pertenece a D_k . No hay, en consecuencia, dinámica que estudiar, y el análisis se restringe a k impar.*

Demostración. Para k par y n par, $g_k(n) = n/2$; iterando se llega en $v_2(n)$ pasos a un impar, que por la Observación 1.2 no está en D_k . $\square$

Comentario 1.4. La versión anterior de este trabajo deducía la misma reducción de una supuesta «equivalencia de paridad» entre g_k y g_{k-1} para k par. Aquel argumento no es válido: concluía $g_k(n) = g_{k-1}(n) + \frac{1}{2}$, cantidad que no es entera, lo que delata precisamente que $g_k(n)$ no está definida. La reducción es correcta, pero por el motivo contrario al que allí se daba.

En lo que sigue k es impar y se estudia g_k sobre $\{1, 2, \dots, k-1\}$.

2. La acción multiplicativa

Proposición 2.1 (g_k es multiplicación por 2^{-1}). *Sea k impar. Para todo $n \in \{1, \dots, k-1\}$ se tiene $g_k(n) \in \{1, \dots, k-1\}$ y*

$$g_k(n) \equiv n \cdot 2^{-1} \pmod{k}.$$

En particular g_k es una biyección de $\{1, \dots, k-1\}$ y todas sus órbitas son ciclos.

Demostración. Si n es par, $g_k(n) = n/2$ cumple $2g_k(n) = n$, luego $g_k(n) \equiv n2^{-1}$; y $1 \leq n/2 < k$. Si n es impar, $g_k(n) = (n+k)/2$ cumple $2g_k(n) = n+k \equiv n$, luego también $g_k(n) \equiv n2^{-1}$; y de $1 \leq n < k$ se sigue $1 \leq (n+k)/2 < k$. La aplicación $n \mapsto n2^{-1}$ es biyectiva módulo k y fija el 0, luego induce una biyección de $\{1, \dots, k-1\}$, y toda biyección de un conjunto finito descompone en ciclos. $\square$

Comentario 2.2. Obsérvese que $\text{ord}_k(2^{-1}) = \text{ord}_k(2)$, de modo que en todos los enunciados siguientes puede usarse indistintamente el orden de 2 o el de su inverso.

Corolario 2.3 (Elementos coprimos con k). *Los elementos de $\{1, \dots, k-1\}$ coprimos con k forman $\varphi(k)/\text{ord}_k(2)$ ciclos, todos de longitud $\text{ord}_k(2)$.*

Demostración. El subgrupo $\langle 2^{-1} \rangle$ de $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*$ tiene orden $\text{ord}_k(2)$, y sus órbitas sobre el grupo son las clases laterales, todas de ese cardinal. El número de órbitas es $\varphi(k)/\text{ord}_k(2)$. $\square$

Si $k = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$, el teorema chino del resto da $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^* \cong \prod_i (\mathbb{Z}/p_i^{a_i}\mathbb{Z})^*$ y, en consecuencia,

$$\text{ord}_k(2) = \text{lcm}(\text{ord}_{p_1^{a_1}}(2), \dots, \text{ord}_{p_r^{a_r}}(2)),$$

lo que reduce el cálculo a los factores primarios.

3. Autosemejanza y estructura cíclica completa

El comportamiento sobre los elementos no coprimos con k no requiere un análisis separado: se reduce al mismo problema para un módulo menor.

Lema 3.1 (Autosemejanza). *Sea k impar, d un divisor de k con $d < k$, y $1 \leq u < k/d$. Entonces*

$$g_k(du) = d g_{k/d}(u).$$

Demostración. Como $d \mid k$ y k es impar, d es impar; por tanto du es par si y sólo si u es par. Si u es par, $g_k(du) = du/2 = d(u/2) = d g_{k/d}(u)$. Si u es impar,

$$g_k(du) = \frac{du + k}{2} = \frac{d(u + k/d)}{2} = d \cdot \frac{u + k/d}{2} = d g_{k/d}(u),$$

donde la última igualdad usa que k/d es impar y u también, luego $u + k/d$ es par. $\square$

Teorema 3.2 (Estructura cíclica completa). *Sea k impar y escribamos $o_m = \text{ord}_m(2)$ para cada divisor $m > 1$ de k . Para cada divisor d de k con $d < k$, el conjunto*

$$\{n \in \{1, \dots, k-1\} : \gcd(n, k) = d\}$$

tiene $\varphi(k/d)$ elementos y se descompone, bajo g_k , en

$$\frac{\varphi(k/d)}{o_{k/d}} \text{ ciclos de longitud } o_{k/d}.$$

La estructura cíclica completa de g_k sobre $\{1, \dots, k-1\}$ es la reunión disjunta de estas familias sobre todos los divisores $d < k$ de k .

Demostración. Los n con $\gcd(n, k) = d$ son exactamente los $n = du$ con $1 \leq u < k/d$ y $\gcd(u, k/d) = 1$, en número $\varphi(k/d)$. Por el Lema 3.1, la aplicación $u \mapsto g_{k/d}(u)$ describe la acción de g_k sobre ese conjunto; y por el Corolario 2.3 aplicado al módulo k/d , dicha acción tiene $\varphi(k/d)/o_{k/d}$ órbitas de longitud $o_{k/d}$. Como los divisores $d < k$ clasifican sin solapamiento los elementos de $\{1, \dots, k-1\}$ según su máximo común divisor con k , la reunión es disjunta y exhaustiva. $\square$

Comentario 3.3. El caso $d = 1$ del Teorema 3.2 es el Corolario 2.3. El elemento k es punto fijo de g_k , pues $g_k(k) = (k+k)/2 = k$, pero no pertenece a $\{1, \dots, k-1\}$ y no interviene en el recuento.

4. Casos verificados

La Tabla 1 recoge la estructura completa predicha por el Teorema 3.2 y la observada por iteración directa. Se indica, para cada caso, la descomposición por divisores.

Cuadro 1: Estructura cíclica de g_k sobre $\{1, \dots, k-1\}$. La notación ℓ^c indica c ciclos de longitud ℓ .

k	Descomposición por divisores	Estr
$85 = 5 \cdot 17$	$d = 1: 8^8; d = 5: 8^2; d = 17: 4^1$	$8^{10},$
$91 = 7 \cdot 13$	$d = 1: 12^6; d = 7: 12^1; d = 13: 3^2$	$12^7,$
$95 = 5 \cdot 19$	$d = 1: 36^2; d = 5: 18^1; d = 19: 4^1$	$36^2,$
$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$	$d = 1: 12^4; d = 3: 12^2; d = 5: 6^2; d = 7: 4^2; d = 15: 3^2; d = 21: 4^1; d = 35: 2^1$	$12^6,$
$135 = 3^3 \cdot 5$	—	$36^2,$
$231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$	—	$30^6,$

En los seis casos la predicción coincide exactamente con la iteración.

Ejemplo 4.1 ($k = 85$). Se tiene $2^{-1} \equiv 43 \pmod{85}$, pues $2 \cdot 43 = 86 \equiv 1$. Las potencias son

$$43^1 \equiv 43, \quad 43^2 \equiv 64, \quad 43^4 \equiv 16, \quad 43^8 \equiv 1 \pmod{85},$$

luego $\text{ord}_{85}(2) = 8$ y los $\varphi(85) = 64$ elementos coprimos dan $64/8 = 8$ ciclos de longitud 8. Los múltiplos de 5 no divisibles por 17 son 16 y dan $\varphi(17)/\text{ord}_{17}(2) = 16/8 = 2$ ciclos de longitud 8; los múltiplos de 17 son 4 y dan $\varphi(5)/\text{ord}_5(2) = 4/4 = 1$ ciclo de longitud 4.

Ejemplo 4.2 ($k = 91$). Se tiene $2^{-1} \equiv 46 \pmod{91}$. Las potencias son

$$46^1 \equiv 46, \quad 46^2 \equiv 23, \quad 46^3 \equiv 57, \quad 46^4 \equiv 74, \quad 46^6 \equiv 64, \quad 46^{12} \equiv 1 \pmod{91},$$

y ninguna potencia propia de 12 da 1, luego $\text{ord}_{91}(2) = 12$. Alternativamente, $\text{ord}_{91}(2) = \text{lcm}(\text{ord}_7(2), \text{ord}_{13}(2)) = \text{lcm}(3, 12) = 12$.

Ejemplo 4.3 ($k = 95$). Aquí $2^{-1} \equiv 48 \pmod{95}$ y $\text{ord}_{95}(2) = \text{lcm}(\text{ord}_5(2), \text{ord}_{19}(2)) = \text{lcm}(4, 18) = 36$, de donde $72/36 = 2$ ciclos de longitud 36 sobre los coprimos. Los 18 múltiplos de 5 forman un único ciclo, de longitud $\text{ord}_{19}(2) = 18$, y los 4 múltiplos de 19 forman un único ciclo de longitud $\text{ord}_5(2) = 4$.

5. Algoritmo de predicción

El Teorema 3.2 se traduce de inmediato en un procedimiento. Dado k impar:

1. factorizar $k = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$;
2. para cada divisor $m > 1$ de k , calcular $o_m = \text{lcm}_i(\text{ord}_{p_i^{b_i}}(2))$ sobre la factorización de m ;
3. emitir, para cada divisor $d < k$, un total de $\varphi(k/d)/o_{k/d}$ ciclos de longitud $o_{k/d}$.

El coste está dominado por la factorización de k ; todo lo demás es aritmética modular elemental.

Ejemplo 5.1 ($k = 105$). $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ y $\varphi(105) = 48$. Se tiene $\text{ord}_3(2) = 2$, $\text{ord}_5(2) = 4$, $\text{ord}_7(2) = 3$, luego $o_{105} = \text{lcm}(2, 4, 3) = 12$ y los coprimos dan $48/12 = 4$ ciclos de longitud 12. Procediendo igual con los divisores restantes se obtiene $o_{35} = 12$, $o_{21} = 6$, $o_{15} = 4$, $o_7 = 3$, $o_5 = 4$, $o_3 = 2$, y la estructura total de la Tabla 1.

6. Extensiones

6.1. Otras bases

Definición 6.1. Para $a > 1$ fijo se define

$$h_{k,a}(n) = \begin{cases} n/a, & n \equiv 0 \pmod{a}, \\ (n+k)/a, & n \not\equiv 0 \pmod{a} \text{ y } n+k \equiv 0 \pmod{a}. \end{cases}$$

Proposición 6.2. Si $\text{gcd}(a, k) = 1$, entonces $h_{k,a}(n) \equiv n a^{-1} \pmod{k}$ siempre que esté definida, y el análisis de las secciones anteriores se traslada sin cambios sustituyendo $\text{ord}_k(2)$ por $\text{ord}_k(a)$.

Demostración. Idéntica a la de la Proposición 2.1: en ambos casos $a h_{k,a}(n) \in \{n, n+k\}$, luego $h_{k,a}(n) \equiv na^{-1} \pmod{k}$. $\square$

Obsérvese que, a diferencia de g_k , la función $h_{k,a}$ con $a \geq 3$ no está definida en todo $\{1, \dots, k-1\}$: sólo en las clases $n \equiv 0$ o $n \equiv -k$ módulo a .

6.2. Una caracterización dinámica del conjunto de Artin $S(2)$

Proposición 6.3. *Sea p un primo impar. Entonces 2 es raíz primitiva módulo p si y sólo si la iteración de g_p sobre $\{1, \dots, p-1\}$ genera un único ciclo, necesariamente de longitud $p-1$.*

Demostración. Por el Corolario 2.3, el número de ciclos es $(p-1)/\text{ord}_p(2)$, que vale 1 si y sólo si $\text{ord}_p(2) = p-1$. $\square$

El conjunto de los primos con esa propiedad es el conjunto de Artin $S(2)$, cuya densidad es objeto de la conjetura de Artin. La Proposición 6.3 no aporta información nueva sobre ella: es una reformulación inmediata del orden de 2 en términos del número de ciclos, y su interés es expositivo, no aritmético. Se ha verificado sobre todos los primos impares menores que 400 sin discrepancias.

7. Relación con las dinámicas de tipo Collatz

Conviene precisar hasta dónde llega el parentesco con la iteración de Collatz, porque es menor de lo que el nombre «funciones tipo Collatz» sugiere.

Comentario 7.1 (g_3 no es la función de Collatz). La versión anterior de este trabajo afirmaba que la función de Collatz corresponde al caso $k=3$. No es así: $g_3(n)$ vale $n/2$ o $(n+3)/2$, mientras que la función de Collatz vale $n/2$ o $3n+1$. Sus valores difieren ya en $n=1$, donde $g_3(1)=2$ y $3 \cdot 1 + 1 = 4$, y las dinámicas son de naturaleza distinta: g_3 es una biyección de $\{1, 2\}$ y la función de Collatz no está acotada.

Comentario 7.2 (Dónde está la diferencia). La distinción esencial es si 2 es invertible módulo el módulo que gobierna la dinámica.

En la familia g_k con k impar, 2 es unidad módulo k , de modo que dividir por dos es un automorfismo de $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. De ahí que g_k sea una permutación de un conjunto finito, que toda órbita sea un ciclo y que la estructura quede fijada por $\text{ord}_k(2)$: no se pierde información en ningún paso.

En la iteración de Collatz el módulo relevante es una potencia de 2, donde 2 no es invertible. Ésa es la razón de que el operador impar no sea inyectivo, de que sus fibras sean infinitas y de que cada iteración consuma niveles de precisión 2-ádica. La dificultad del problema clásico reside precisamente en esa no invertibilidad, ausente aquí.

A ello se añade que g_k carece de factor expansivo: el multiplicador es 1 y la órbita permanece acotada en $\{1, \dots, k-1\}$ por construcción. No hay, por tanto, la tensión entre crecimiento y colapso que caracteriza a la dinámica de Collatz.

8. Conclusiones

Para k impar, g_k es una biyección de $\{1, \dots, k-1\}$ que actúa como multiplicación por 2^{-1} módulo k , y su restricción a los múltiplos de un divisor d es exactamente $d g_{k/d}$.

De esa autosemejanza se sigue la estructura cíclica completa, que queda determinada por los órdenes multiplicativos de 2 módulo los divisores de k , y que se calcula con coste dominado por la factorización de k . Para k par la función no está definida sobre ningún impar y no hay dinámica que estudiar.

La descripción es completa, pero conviene no sobrevalorar su alcance. Lo que la hace posible es que la familia carece a la vez de factor expansivo y de colapso de profundidad variable; el comportamiento de estas funciones no es «aparentemente caótico», sino predecible por construcción. Su interés está en la nitidez de la clasificación y en aplicaciones como la caracterización del conjunto de Artin, no en una eventual luz sobre el problema de Collatz.

Referencias

- [1] L. Collatz, *Problem 30*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **47** (1937).
- [2] K. Ireland, M. Rosen, *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, Graduate Texts in Mathematics **84**, Springer-Verlag, 1990.
- [3] J. C. Lagarias, *The $3x + 1$ problem and its generalizations*, American Mathematical Monthly **92** (1985), 3–23.