

La magnitud del reseteo y la contracción neta del tramo

Miguel Cerdá Bennassar

Junio de 2026; revisado en septiembre de 2026

Resumen

La Sección 31.3 fijó las coordenadas (m, K) , la ley de subida de razón $3/2$, el mapa de tramo Φ y el *nivel de salida* K' —dónde aterriza la órbita tras un tramo—. El reseteo tiene, sin embargo, un segundo número: su *magnitud* $s = \nu_2(m \cdot 3^K - 1)$, que no dice dónde se cae sino cuánto, y que por tanto gobierna la contracción neta del tramo. Esta sección estudia s . Se reproduce, con demostración, el lema de densidad 2-ádica del Capítulo 15; se prueba que la ley de s sobre los impares es exactamente geométrica e independiente de K ; se calcula el factor neto de un tramo aislado, mostrando que un tramo contrae si y sólo si $s > K \log_2(3/2)$ —de modo que los tramos largos, raros, típicamente se expanden—; y se prueba que, bajo la medida de Haar, la división media por paso impar tiende a 2 para casi todo punto 2-ádico, con factor neto $3/4$: el drift negativo de Kontorovich–Sinai. Para las órbitas de los enteros, ese promedio es una hipótesis, respaldada por el cómputo pero no demostrada. La contracción en media no es la contracción de cada órbita; esa brecha, que controla la divergencia, queda como problema abierto.

1. Posición en el capítulo

La Sección 31.3 mostró que la dinámica de Collatz, en coordenadas (m, K) , se reduce a iterar el mapa de tramo $\Phi(m, K) = (m', K')$, donde cada paso comprime un tramo maximal: $K - 1$ subidas de razón $3/2$ seguidas de un reseteo. De ese reseteo, la Sección 31.3 estudió el *nivel de salida* $K' = \nu_2(R + 1)$, con $R = \text{odd}(m \cdot 3^K - 1)$. Queda por estudiar la otra mitad del reseteo: su profundidad. Esta es la cantidad que decide si la órbita decrece, y es el objeto de la presente sección.

2. La identidad de cierre

Proposición 2.1 (Profundidad del reseteo). *Sea $n_0 = m \cdot 2^K - 1$ y sea $n_{K-1} = 2m \cdot 3^{K-1} - 1$ el último impar del tramo (Sección 31.3). Entonces*

$$3n_{K-1} + 1 = 2(m \cdot 3^K - 1), \quad r := \nu_2(3n_{K-1} + 1) = 1 + s, \quad s := \nu_2(m \cdot 3^K - 1) \geq 1,$$

y el impar siguiente es $R = (m \cdot 3^K - 1)/2^s$.

Demostración. $3n_{K-1} + 1 = 6m \cdot 3^{K-1} - 2 = 2(m \cdot 3^K - 1)$. Como $m \cdot 3^K$ es impar, $m \cdot 3^K - 1$ es par y $s \geq 1$, de donde $r = 1 + s \geq 2$; el reseteo divide por $2^r = 2^{1+s}$ y produce $R = (3n_{K-1} + 1)/2^{1+s} = (m \cdot 3^K - 1)/2^s$. $\square$

Así, el reseteo queda descrito por dos enteros: el nivel $K' = \nu_2(R + 1)$ (Sección 31.3) y la profundidad s . La identidad $r = 1 + s$ vincula s con la valuación $\nu_2(3 \cdot - + 1)$ del paso de cierre, lo que permite fijar su ley con un lema de densidad puramente 2-ádico.

3. Lema de densidad 2-ádica

El siguiente lema se estableció en el Capítulo 15; lo reproducimos aquí *con demostración* para que el escrito sea autocontenido.

Lema 3.1 (Densidad 2-ádica decreciente). *Para m impar y $r \geq 1$, la condición $\nu_2(3m+1) = r$ define exactamente una clase de congruencia módulo 2^{r+1} dentro de los impares, y su densidad relativa en $\mathbb{N}_{\text{impar}}$ es 2^{-r} .*

Demostración. La congruencia $3m+1 \equiv 0 \pmod{2^r}$ tiene solución única $m \equiv a \pmod{2^r}$, pues $\gcd(3, 2^r) = 1$; ésta describe los m con $\nu_2(3m+1) \geq r$. Para aislar $\nu_2(3m+1) = r$ se trabaja módulo 2^{r+1} : escribiendo $m = a + t2^r$ con $t \in \{0, 1\}$ y $3a+1 = 2^r c$ con c impar,

$$3m+1 = 2^r(c+3t).$$

Si $t = 0$, $c+3t = c$ es impar y $\nu_2(3m+1) = r$. Si $t = 1$, $c+3$ es par y $\nu_2(3m+1) \geq r+1$. Luego $\nu_2(3m+1) = r$ es una única clase módulo 2^{r+1} . Como una clase módulo 2^{r+1} tiene densidad $2^{-(r+1)}$ entre los enteros y los impares tienen densidad 2^{-1} , la densidad relativa es $2^{-(r+1)}/2^{-1} = 2^{-r}$. $\square$

Proposición 3.2 (Ley exacta de la profundidad). *Para todos $K, j \geq 1$, la densidad natural, entre los impares, de $\{n : K(n) = K, s(n) = j\}$ es $2^{-(K+j)}$. En consecuencia, la densidad de $\{s = j\}$ es 2^{-j} , $\mathbb{E}[s] = 2$, y s es independiente de K .*

Demostración. Los impares con $K(n) = K$ son los $n = m \cdot 2^K - 1$ con m impar, de densidad 2^{-K} . Para K fijo, $m \mapsto m \cdot 3^K$ permuta las clases impares módulo 2^{j+1} , y $\nu_2(m \cdot 3^K - 1) = j$ equivale a $m \cdot 3^K \equiv 1 + 2^j \pmod{2^{j+1}}$, que es una de las 2^j clases impares; su densidad relativa es 2^{-j} . Es también el apartado (1) del Teorema 6.2 de la Sección 31.3. $\square$

El recuento exhaustivo reproduce la ley exacta. Asignando a cada impar la profundidad de reseteo de su propio tramo, $s = \nu_2(m \cdot 3^K - 1)$, y contando sobre la población completa de impares, la frecuencia de s coincide con el valor 2^{-j} de la Proposición 3.2, con media 2 (Tabla 1).

$s = j$	frecuencia	2^{-j}	desv. rel.
1	0,500000	0,500000	+0,0000
2	0,249999	0,250000	-0,0000
3	0,125000	0,125000	+0,0000
4	0,062500	0,062500	+0,0000
5	0,031250	0,031250	+0,0000
6	0,015625	0,015625	+0,0000
7	0,007812	0,007812	-0,0000
8	0,003906	0,003906	-0,0000

Tabla 1: Distribución de la profundidad de reseteo $s = \nu_2(m \cdot 3^K - 1)$, obtenida por enumeración directa de todos los impares de $[1, 2 \cdot 10^7]$ (10^7 casos, sin muestreo). La frecuencia coincide con el valor exacto 2^{-j} de la Proposición 3.2 y la media empírica es $\mathbb{E}[s] = 2,00000$.

4. Contracción de un tramo aislado

Proposición 4.1 (Factor neto de un tramo). *Sea $n_0 = m \cdot 2^K - 1$ y $R = (m \cdot 3^K - 1)/2^s$ su imagen. Entonces*

$$\frac{R}{n_0} = \left(\frac{3}{2}\right)^K 2^{-s} (1 + o(1)) \quad (m \rightarrow \infty),$$

y por tanto, para m suficientemente grande, el tramo contrae ($R < n_0$) si y sólo si

$$s > K \log_2 \frac{3}{2} = K (\log_2 3 - 1) \approx 0,585 K.$$

Demostración. $R/n_0 = \frac{(m \cdot 3^K - 1)/2^s}{m \cdot 2^K - 1} = \frac{m \cdot 3^K - 1}{m \cdot 2^{K+s} - 2^s} = \left(\frac{3}{2}\right)^K 2^{-s} \frac{1 - (m 3^K)^{-1}}{1 - (m 2^K)^{-1}}$, y el último factor tiende a 1. Tomando $\log_2$, $R < n_0$ equivale a $K \log_2(3/2) - s < 0$. $\square$

Observación 4.2 (Los tramos largos típicamente se expanden). Por la Proposición 3.2, s es independiente de K y $\mathbb{E}[s] = 2$, mientras que el umbral de contracción crece con K :

$$K \log_2(3/2) \approx 0,585 K.$$

Para m grande, un tramo de índice K contrae si y sólo si

$$s \geq \lfloor K \log_2(3/2) \rfloor + 1,$$

lo que ocurre con densidad $2^{-\lfloor K \log_2(3/2) \rfloor}$ entre los tramos de índice K : para $K = 4$ es $\frac{1}{4}$, y decrece exponencialmente con K . La contracción, por tanto, **no** ocurre tramo a tramo; la subida $(3/2)^{K-1}$ es crecimiento real, y cuanto más cerca arranca n_0 de -1 (mayor K), mayor es el ascenso. Lo que salva el balance no es cada tramo, sino que los tramos largos son exponencialmente raros ($\mathbb{P}(K = j) = 2^{-j}$, Sección 31.3).

5. Contracción en media: el drift

El balance correcto se ve al contar por *paso impar*, no por tramo. Un tramo de índice K realiza K pasos impares (multiplicaciones por 3) y $K + s$ divisiones por 2: las $K - 1$ subidas aportan una cada una y el reseteo aporta $1 + s$.

Proposición 5.1 (Identidad de conteo por paso impar). *Sobre cualquier segmento inicial de una órbita,*

$$\frac{\sum_t (K_t + s_t)}{\sum_t K_t} = 1 + \frac{\sum_t s_t}{\sum_t K_t}.$$

Esta identidad es exacta.

Teorema 5.2 (Drift bajo Haar). *Para casi todo impar 2-ádico x respecto de la medida de Haar, a lo largo de la órbita de Φ ,*

$$\frac{\sum_{t < T} (K_t + s_t)}{\sum_{t < T} K_t} \longrightarrow 1 + \frac{\mathbb{E}[s]}{\mathbb{E}[K]} = 1 + \frac{2}{2} = 2 \quad (T \rightarrow \infty),$$

de modo que el factor neto por paso impar tiende a $3/2^2 = 3/4$ y el drift es

$$\mu := \log 3 - 2 \log 2 = \log \frac{3}{4} < 0,$$

el de Kontorovich–Sinai [2] para $(d, g) = (2, 3)$.

Demostración. Por el Teorema 6.2 de la Sección 31.3, bajo la medida de Haar los pares (K_t, s_t) sucesivos son independientes e idénticamente distribuidos, con $\mathbb{E}[K] = \mathbb{E}[s] = 2$. Por la ley fuerte de los grandes números, $\frac{1}{T} \sum_{t < T} K_t \rightarrow 2$ y $\frac{1}{T} \sum_{t < T} s_t \rightarrow 2$ para casi todo punto, y se aplica la Proposición 5.1. $\square$

Los enteros positivos forman un conjunto de medida nula en $\mathbb{Z}_2$, de modo que el Teorema 5.2 no dice nada sobre ninguno de ellos en particular. Para la órbita de un entero concreto, que los promedios de K_t y s_t converjan a 2 es una *hipótesis*: respaldada computacionalmente, no demostrada.

Conviene leer este resultado junto con la Observación 4.2. Un tramo aislado de índice K grande se expande; sin embargo, contado por paso impar y promediado sobre la órbita, el sistema contrae con factor $3/4$. No hay contradicción: las dos afirmaciones viven en escalas distintas. La expansión $(3/2)^{K-1}$ de un tramo largo es real, pero esos tramos son raros, y su contribución al promedio se compensa con los muchos tramos cortos y con la división profunda que ocasionalmente trae el reseteo. El drift es la forma cuantitativa de esa compensación.

La verificación computacional respalda esa hipótesis. Iterando el mapa de tramo Φ desde todos los impares de arranque menores que 10^6 —más de once millones de tramos— los promedios orbitales reproducen las medias de Haar y el factor neto $3/4$ (Tabla 2).

magnitud	empírico	predicho
$\mathbb{E}[K]$ por tramo	2,001	2
$\mathbb{E}[s]$ por tramo	1,985	2
división media por paso impar	1,992	2
factor neto por paso impar	0,7543	0,7500
drift $\mu = \log(\text{factor})$	-0,282	-0,288

Tabla 2: Confirmación del drift sobre órbitas reales: iteración de Φ desde todos los impares de arranque menores que 10^6 ($1,15 \cdot 10^7$ tramos recorridos). Los promedios orbitales concuerdan con las medias predichas y con el factor neto $3/4$.

Observación 5.3 (Una medida en media). Como en la Sección 31.3, el factor $3/4$ describe el comportamiento *promedio* de la órbita, no el de un tramo ni el de un paso concretos. Las pequeñas desviaciones de la Tabla 2 respecto de los valores límite (1,992 frente a 2; 0,7543 frente a 0,75) pueden atribuirse al transitorio finito de las órbitas, que terminan todas en $(1, 1)$; no se ha comprobado sistemáticamente cómo varían al ampliar la cota de arranque.

6. El problema abierto y su lugar en el programa

Reunidos los resultados, conviene fijar con precisión qué se ha demostrado y qué descansa en una hipótesis, y situar después lo que queda abierto dentro del programa del capítulo.

Observación 6.1 (Estatus de los resultados). Conviene separar dos niveles. (a) *Demostrado*: la identidad de cierre $r = 1 + s$ (Proposición 2.1), el Lema de densidad 3.1, la ley exacta de s y su independencia de K (Proposición 3.2), el factor neto $R/n_0 = (3/2)^K 2^{-s} (1 + o(1))$ y el criterio de contracción $s > K \log_2(3/2)$ (Proposición 4.1), la identidad de conteo (Proposición 5.1) y el drift $3/4$ para casi todo punto 2-ádico (Teorema 5.2). (b) *No demostrado*: que los promedios de K_t y s_t a lo largo de la órbita de un entero concreto converjan a sus medias. Está respaldado computacionalmente (Tabla 2), y precisar ese límite es el contenido del Problema 6.2.

Problema 6.2 (De la contracción en media a la contracción orbital — ABIERTO). El drift $\mu = \log(3/4) < 0$ (demostrado bajo Haar en el Teorema 5.2; hipótesis para las órbitas enteras) afirma que la órbita decrece *en promedio*. **Queda abierto** deducir de ello que ninguna órbita escapa a infinito: las excursiones raras de K grande (Observación 4.2) producen ascensos arbitrariamente grandes, y excluir cadenas infinitas exige controlar la órbita individual, no sólo su media.

Observación 6.3 (Los dos obstáculos). La Sección 31.3 concentró la dificultad de Collatz en dos lugares: la ausencia de ciclos no triviales y el comportamiento orbital de los pares (K_t, s_t) . Ninguno de los dos se reparte limpiamente entre las coordenadas del reseteo: la ecuación de los ciclos de un solo circuito involucra m , K y s a la vez (Observación 4.5 de la Sección 31.3 y Steiner [1]), y el drift depende de los promedios de K y de s (Proposición 5.1). Esta sección demuestra el drift bajo Haar y aísla lo que falta: su versión a lo largo de la órbita de cada entero.

A. Cómputo de las Tablas 1 y 2

Ambas tablas se obtuvieron por aritmética entera exacta, sin punto flotante; las frecuencias son números racionales reproducibles sin error de redondeo. La única primitiva auxiliar es la valuación 2-ádica $\nu_2(x) = \max\{e \geq 0 : 2^e \mid x\}$, y $\text{odd}(x) = x/2^{\nu_2(x)}$ es su parte impar. La Tabla 1 resulta del Algoritmo 1, que enumera todos los impares del intervalo y registra la profundidad de reseteo de cada tramo; la Tabla 2, del Algoritmo 2, que itera el mapa de tramo Φ sobre cada órbita y acumula los conteos por paso impar.

Algoritmo 1 Distribución de la profundidad de reseteo s (enumeración exhaustiva).

Entrada: cota N (en la Tabla 1, $N = 2 \cdot 10^7$)

Salida: frecuencias $f[j]$ y media de s

```

1: cuenta[.]  $\leftarrow$  0; total  $\leftarrow$  0
2: para  $n \leftarrow 1, 3, 5, \dots, N$  hacer                                 $\triangleright$  todos los impares de  $[1, N]$ 
3:    $K \leftarrow \nu_2(n+1)$ ;  $m \leftarrow (n+1)/2^K$ 
4:    $s \leftarrow \nu_2(m \cdot 3^K - 1)$                                  $\triangleright$  profundidad del reseteo
5:   cuenta[ $s$ ]  $\leftarrow$  cuenta[ $s$ ] + 1; total  $\leftarrow$  total + 1
6: fin para
7: devolver  $f[j] = \text{cuenta}[j]/\text{total}$  y media =  $(\sum_j j \cdot \text{cuenta}[j])/\text{total}$ 
```

Con $N = 2 \cdot 10^7$ el Algoritmo 1 recorre 10^7 impares; con $M = 10^6$ el Algoritmo 2 recorre más de $1,15 \cdot 10^7$ tramos. Los resultados son los de las Tablas 1 y 2.

Referencias

- [1] R. P. Steiner, *A theorem on the Syracuse problem*, Proc. 7th Manitoba Conference on Numerical Mathematics (1977), Utilitas Mathematica, Winnipeg, 553–559.
- [2] A. V. Kontorovich, Ya. G. Sinai, *Structure theorem for (d, g, h) -maps*, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) **33** (2002), no. 2, 213–224.

Algoritmo 2 Promedios orbitales y factor neto por paso impar.

Entrada: cota de arranque M (en la Tabla 2, $M = 10^6$)

Salida: $\mathbb{E}[K]$, $\mathbb{E}[s]$, división media y factor neto por paso impar

```
1:  $S_K \leftarrow 0$ ;  $S_s \leftarrow 0$ ;  $T \leftarrow 0$ 
2: para  $n \leftarrow 1, 3, 5, \dots, M$  hacer                                 $\triangleright$  impares de arranque
3:    $K \leftarrow \nu_2(n+1)$ ;  $m \leftarrow (n+1)/2^K$ 
4:   while  $(m, K) \neq (1, 1)$  hacer                                 $\triangleright$  recorre la órbita, tramo a tramo
5:      $s \leftarrow \nu_2(m \cdot 3^K - 1)$ ;  $R \leftarrow (m \cdot 3^K - 1)/2^s$ 
6:      $K' \leftarrow \nu_2(R+1)$ ;  $m' \leftarrow (R+1)/2^{K'}$ 
7:      $S_K \leftarrow S_K + K$ ;  $S_s \leftarrow S_s + s$ ;  $T \leftarrow T + 1$ 
8:      $(m, K) \leftarrow (m', K')$ 
9:   fin while
10: fin para
11:  $\mathbb{E}[K] \leftarrow S_K/T$ ;  $\mathbb{E}[s] \leftarrow S_s/T$ 
12: división media por paso impar  $\leftarrow (S_K + S_s)/S_K$ ; factor neto  $\leftarrow 3 / 2^{(S_K + S_s)/S_K}$ 
13: devolver  $\mathbb{E}[K]$ ,  $\mathbb{E}[s]$ , división media, factor neto
```
