

Frecuencias residuales a lo largo de la órbita y deriva orbital: un criterio módulo 8

Miguel Cerdá Bennassar

Septiembre de 2026

Resumen

La Sección 31.6 aisló la deriva orbital (H_{dr}) como el ingrediente que excluiría la divergencia. Este escrito proporciona un criterio suficiente para ella en términos de un observable bien definido sobre toda órbita, incluidas las hipotéticas órbitas divergentes: las frecuencias con que los impares de la órbita visitan las clases residuales módulo 8. Se demuestra que si, a lo largo de la órbita de n , el límite inferior de $F(1) + 2F(5)$ supera $\log_2 3 - 1 \approx 0,585$, donde $F(a)$ es la frecuencia de la clase a mód 8, entonces la órbita no diverge; en términos de discrepancia, basta que la discrepancia orbital módulo 8 quede por debajo de 0,055. La escala 8 es la mínima para este criterio de truncamiento: módulo 4, ni siquiera la equidistribución exacta basta. Bajo la medida de Haar el criterio se cumple para casi todo punto 2-ádico, pero los enteros forman un conjunto de medida nula, y demostrarlo para todo entero sigue abierto. Se incluyen mediciones a lo largo de órbitas concretas, la discrepancia agregada de las imágenes de descenso y, como modelo idealizado, la cola exponencial de las excursiones bajo Haar con su tasa óptima. Este escrito sustituye a las versiones anteriores de las Secciones 31.8 y 31.9.

1. Posición en el capítulo

La Sección 31.6 formuló la deriva orbital negativa

$$(H_{dr}) : \quad \liminf_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{i < L} r_i > \log_2 3, \quad r_i = \nu_2(3n^{(i)} + 1),$$

para la órbita por pasos impares de un impar n ,

$$n = n^{(0)}, n^{(1)}, n^{(2)}, \dots, \quad n^{(i+1)} = \frac{3n^{(i)} + 1}{2^{r_i}},$$

y mostró que (H_{dr}) equivale a que la órbita sea acotada. El paso siguiente es sustituir (H_{dr}), que es un enunciado sobre promedios de valuaciones, por un enunciado sobre la distribución residual de los propios términos de la órbita, que es lo que un argumento de equidistribución podría llegar a controlar.

La exigencia básica es que el observable esté definido sobre la parte de la órbita donde podría ocurrir la divergencia. Eso descarta los records de la Sección 31.6 como índice (Sección 2) y lleva a usar el tiempo orbital $L \rightarrow \infty$.

2. Por qué el índice no pueden ser los records

Proposición 2.1. *Sea n un impar y sean $m_0 = n > m_1 > m_2 > \dots$ los records de su órbita, es decir, los mínimos estrictos sucesivos (Sección 31.6).*

1. Los records son finitos: existe $J^*(n) < \infty$ tal que la sucesión es

$$m_0 > m_1 > \cdots > m_{J^*(n)}.$$

2. Si la órbita de n diverge, a partir de $m_{J^*(n)}$ la órbita no vuelve a bajar de ese valor, y la excursión que arranca en él no termina.

Demostración. Una sucesión estrictamente decreciente de enteros positivos es finita. El segundo punto es la definición de último record. $\square$

Observación 2.2. En consecuencia, cualquier observable que se construya sobre los primeros J records solo existe para $J \leq J^*(n)$, y un enunciado asintótico con $J \rightarrow \infty$ a lo largo de una misma órbita no está definido. Además, en una órbita divergente toda la parte infinita de la trayectoria cae en la última excursión, que un observable basado en excursiones terminadas no ve. Un límite en el que $J^*(n_q) \rightarrow \infty$ para una familia de arranques $n_q \rightarrow \infty$ sí tiene sentido, pero es un enunciado sobre familias de órbitas, no sobre una órbita fija, y no puede excluir que una órbita concreta tenga un último record y después diverja. El parámetro que sí tiende a infinito en una órbita divergente es el tiempo orbital, y es el que se usa a continuación.

3. El observable: frecuencias residuales orbitales

Definición 3.1 (Frecuencias orbitales). Sea n un impar con órbita por pasos impares $(n^{(i)})_{i \geq 0}$. Para $R \geq 1$, $L \geq 1$ y a impar módulo 2^R ,

$$F_L^{(R)}(a) = \frac{1}{L} \# \{i < L : n^{(i)} \equiv a \pmod{2^R}\}.$$

Escribiremos $F_L(a) = F_L^{(3)}(a)$ para las frecuencias módulo 8, y

$$D_L = \max_{a \text{ impar (mod 8)}} \left| F_L(a) - \frac{1}{4} \right|$$

para la discrepancia orbital módulo 8.

La órbita está definida para todo $i \geq 0$: si alcanza 1, se queda en 1, pues $(3 \cdot 1 + 1)/4 = 1$. Por tanto $L \rightarrow \infty$ tiene sentido para toda órbita, sea convergente, cíclica o divergente.

Lema 3.2 (Valuación y residuo). Sea c_j el único residuo impar módulo 2^j con $3c_j \equiv -1 \pmod{2^j}$. Para todo impar x y todo $j \geq 1$,

$$\nu_2(3x + 1) \geq j \iff x \equiv c_j \pmod{2^j}.$$

En particular, $c_1 \equiv 1 \pmod{2}$, $c_2 = 1$, $c_3 = 5$: se tiene $\nu_2(3x + 1) \geq 2$ si y solo si $x \equiv 1 \pmod{4}$, y $\nu_2(3x + 1) \geq 3$ si y solo si $x \equiv 5 \pmod{8}$.

Demostración. $2^j \mid 3x + 1$ equivale a $3x \equiv -1 \pmod{2^j}$, y como 3 es invertible módulo 2^j la solución es una única clase. Para $j = 2$: $3 \cdot 1 = 3 \equiv -1 \pmod{4}$. Para $j = 3$: $3 \cdot 5 = 15 \equiv -1 \pmod{8}$. $\square$

Lema 3.3 (Truncamiento). Para todo entero $r \geq 1$ y todo $R \geq 1$,

$$r \geq \min(r, R) = \sum_{j=1}^R \mathbf{1}\{r \geq j\}.$$

Demostración. Si $r \geq R$, la suma vale R ; si $r < R$, vale r . $\square$

4. El criterio

Teorema 4.1 (Cota inferior por frecuencias). *Para todo impar n , todo $L \geq 1$ y todo $R \geq 1$,*

$$\frac{1}{L} \sum_{i < L} r_i \geq 1 + \sum_{j=2}^R F_L^{(j)}(c_j).$$

En particular, para $R = 3$,

$$\frac{1}{L} \sum_{i < L} r_i \geq 1 + F_L(1) + 2F_L(5).$$

Demostración. Por los Lemas 3.3 y 3.2,

$$r_i \geq \sum_{j=1}^R \mathbf{1}\{r_i \geq j\}, \quad \mathbf{1}\{r_i \geq j\} = \mathbf{1}\{n^{(i)} \equiv c_j \pmod{2^j}\},$$

con $\mathbf{1}\{r_i \geq 1\} = 1$. Promediando en $i < L$ se obtiene la primera desigualdad. Para $R = 3$, la clase 1 mód 4 es la unión de las clases 1 y 5 módulo 8, luego $F_L^{(2)}(1) = F_L(1) + F_L(5)$ y $F_L^{(3)}(5) = F_L(5)$. $\square$

Teorema 4.2 (No divergencia bajo deriva orbital). *Si la órbita de n cumple (H_{dr}) , la órbita es acotada.*

Demostración. Supongamos que la órbita no es acotada. Entonces no repite ningún valor (si lo hiciera, sería finalmente periódica y acotada), luego visita cada entero a lo sumo una vez y $n^{(i)} \rightarrow \infty$. De la identidad exacta

$$n^{(L)} = n \prod_{i < L} \frac{3 + 1/n^{(i)}}{2^{r_i}}$$

se sigue

$$\log n^{(L)} = \log n + L \log 3 - \left(\sum_{i < L} r_i \right) \log 2 + \sum_{i < L} \log \left(1 + \frac{1}{3n^{(i)}} \right),$$

y el último sumatorio es $o(L)$, porque sus términos tienden a 0. Por (H_{dr}) , existen $\varepsilon > 0$ y L_0 tales que $\sum_{i < L} r_i \geq L(\log_2 3 + 2\varepsilon)$ para $L \geq L_0$, de donde $\log n^{(L)} \leq \log n - \varepsilon L \log 2$ para L grande. Así $n^{(L)} \rightarrow 0$, lo que contradice que $n^{(L)} \geq 1$. $\square$

Corolario 4.3 (Criterio módulo 8). *Si, a lo largo de la órbita de n ,*

$$\liminf_{L \rightarrow \infty} (F_L(1) + 2F_L(5)) > \log_2 3 - 1 \approx 0,585,$$

entonces se cumple (H_{dr}) y la órbita de n es acotada.

Demostración. Por el Teorema 4.1, $\liminf \frac{1}{L} \sum_{i < L} r_i \geq 1 + \liminf (F_L(1) + 2F_L(5)) > \log_2 3$. Se aplica el Teorema 4.2. $\square$

Corolario 4.4 (Criterio de discrepancia). *Si*

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} D_L < \frac{7/4 - \log_2 3}{3} \approx 0,0550,$$

la órbita de n es acotada.

Demostración. $F_L(1) + 2F_L(5) \geq (\frac{1}{4} - D_L) + 2(\frac{1}{4} - D_L) = \frac{3}{4} - 3D_L$, y $\frac{3}{4} - 3D_L > \log_2 3 - 1$ equivale a $D_L < (7/4 - \log_2 3)/3$. Se aplica el Corolario 4.3. $\square$

Observación 4.5 (La escala 8 es la mínima para este criterio). Con equidistribución exacta módulo 2^R , la cota del Teorema 4.1 vale $1 + \sum_{j=2}^R 2^{-(j-1)} = 2 - 2^{1-R}$. Para $R = 2$ da $1,5 < \log_2 3$: módulo 4, ni la equidistribución perfecta basta. Para $R = 3$ da $1,75$, con un margen de $0,165$ sobre $\log_2 3$. Escalas mayores aumentan el margen hasta 2, pero no son necesarias. La minimalidad se refiere a este criterio de truncamiento, no a cualquier criterio posible basado en frecuencias residuales.

Observación 4.6 (Lectura contrapositiva). Una órbita divergente debe cumplir

$$\liminf_{L \rightarrow \infty} (F_L(1) + 2F_L(5)) \leq 0,585,$$

frente al valor $0,75$ de la equidistribución: debe presentar, en media asintótica, un déficit respecto del valor equidistribuido en la combinación ponderada $F(1) + 2F(5)$. Esta condición penaliza especialmente la clase 5 módulo 8, responsable de $r_i \geq 3$. No se sigue de ella ninguna cota separada sobre $F(1) + F(5)$ ni sobre $F(3) + F(7)$: por ejemplo, $F(1) = 0,45$ y $F(5) = 0,05$ dan $F(1) + 2F(5) = 0,55$ con $F(3) + F(7) = \frac{1}{2}$. Es la versión residual de la condición necesaria elemental y conocida según la cual una trayectoria divergente no puede tener asintóticamente una proporción de pasos impares inferior a $\log 2 / \log 3$ (véase [1]).

Observación 4.7 (Órbitas convergentes). Si la órbita alcanza 1, a partir de ahí $n^{(i)} = 1$, de modo que $F_L(1) \rightarrow 1$, $F_L(5) \rightarrow 0$ y $F_L(1) + 2F_L(5) \rightarrow 1 > 0,585$. Toda órbita convergente cumple, pues, el criterio; su contenido está en lo que impone a una hipotética órbita divergente.

Observación 4.8 (Qué no dice el criterio). El Corolario 4.3 es una condición suficiente para (H_{dr}) , no equivalente. Por la Sección 31.6, (H_{dr}) equivale a la acotación; demostrar el criterio para todo entero sería, por tanto, al menos tan difícil como demostrar que ninguna órbita diverge. El criterio no reduce la dificultad; la formula como una desigualdad de frecuencias residuales en una escala fija.

5. Haar frente a órbita

Conviene separar con precisión dos afirmaciones que se parecen.

Lema 5.1 (La clase módulo 8 se lee en dos valuaciones). *Para todo impar x , con $r = \nu_2(3x + 1)$ y $r' = \nu_2(3U(x) + 1)$,*

$$\begin{aligned} x \equiv 1 &\iff r = 2, & x \equiv 5 &\iff r \geq 3, \\ x \equiv 3 &\iff r = 1, \ r' \geq 2, & x \equiv 7 &\iff r = 1, \ r' = 1, \end{aligned}$$

todas las congruencias módulo 8.

Demostración. Las dos primeras equivalencias se siguen del Lema 3.2. Si $x \equiv 3$ (mód 4), entonces $r = 1$ y $U(x) = (3x + 1)/2$; para $x = 8k + 3$ se obtiene $U(x) = 12k + 5 \equiv 1$ (mód 4), luego $r' \geq 2$, y para $x = 8k + 7$ se obtiene $U(x) = 12k + 11 \equiv 3$ (mód 4), luego $r' = 1$. $\square$

Proposición 5.2 (El criterio bajo Haar). *Sea μ la medida de Haar normalizada sobre los impares 2-ádicos. Para μ -casi todo impar 2-ádico x , las frecuencias orbitales de x módulo 8 tienden a $\frac{1}{4}$ en cada clase, y $F_L(1) + 2F_L(5) \rightarrow \frac{3}{4}$. En particular, μ -casi todo punto cumple el criterio del Corolario 4.3.*

Demostración. Se usa un único resultado previo: bajo μ , las valuaciones $r_0, r_1, \dots$ de la órbita de Syracuse son i.i.d. con $\mu(r_i = j) = 2^{-j}$ (Sección 31.5, Lema 3.1, basado en la conjugación con el desplazamiento de Bernoulli de [1]). Por el Lema 5.1, el indicador de cada clase módulo 8 en el paso i es una función $g_a(r_i, r_{i+1})$ de dos valuaciones consecutivas, con esperanza

$$E[g_1] = \mu(r = 2) = \frac{1}{4}, \quad E[g_5] = \mu(r \geq 3) = \frac{1}{4}, \quad E[g_3] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \quad E[g_7] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Las sucesiones $(g_a(r_{2t}, r_{2t+1}))_{t \geq 0}$ y $(g_a(r_{2t+1}, r_{2t+2}))_{t \geq 0}$ son, cada una, i.i.d. y acotadas, de modo que la ley fuerte de los grandes números da, μ -casi seguro, que sus medias tienden a $\frac{1}{4}$. La frecuencia $F_L(a)$ es un promedio de ambas, y también tiende a $\frac{1}{4}$. $\square$

La demostración no necesita la ergodicidad de la aplicación de Syracuse: basta la independencia de las valuaciones y la ley fuerte de los grandes números.

El enunciado de la Proposición 5.2 no dice nada sobre ningún entero concreto: los enteros positivos forman un conjunto numerable, de medida nula para μ , y el teorema de Birkhoff excluye, en principio, cualquier conjunto de medida nula. Que los enteros no sean excepcionales es exactamente lo que queda abierto.

Problema 5.3 (Abierto). Demostrar que, para todo entero positivo impar n ,

$$\liminf_{L \rightarrow \infty} (F_L(1) + 2F_L(5)) > \log_2 3 - 1$$

a lo largo de su órbita; o, más débil pero suficiente, que ninguna órbita puede cumplir la desigualdad contraria.

6. Evidencia experimental

Los datos de esta sección son experimentales y no forman parte de ningún enunciado demostrado.

6.1. Frecuencias a lo largo de órbitas concretas

Para cada arranque se recorre la órbita por pasos impares hasta alcanzar 1 y se calcula $q(n) = F_L(1) + 2F_L(5)$ sobre la órbita completa, así como la media de valuaciones $\bar{a}(n) = \frac{1}{L} \sum_{i < L} r_i$.

Arranques	L medio	q medio	q mínimo	$\bar{a}$ mínimo
2000 impares de 20 cifras	158	0,771	0,591	1,774
2000 impares de 60 cifras	478	0,757	0,638	1,835
2000 impares de 200 cifras	1600	0,752	0,693	1,910

Cuadro 1: Frecuencias módulo 8 a lo largo de órbitas completas, para arranques impares aleatorios. El valor medio de q se acerca a $\frac{3}{4}$ y el mínimo sube con la longitud de la órbita; en todos los casos $q > 0,585$.

Ejemplo 6.1 (El criterio es asintótico). Para $n = 2^k - 1$ los primeros $k - 1$ impares de la órbita son de forma $4n+3$ (Sección 31.3), y sobre ese prefijo $q = 0$. Sobre la órbita completa, en cambio, $q = 0,606$ para $k = 100$ ($L = 528$) y $q = 0,605$ para $k = 500$ ($L = 2417$), por encima del umbral. Un prefijo arbitrariamente largo puede violar el criterio; lo que cuenta es el límite inferior.

6.2. Discrepancia agregada de las imágenes de descenso

La Tabla 2 reúne las imágenes de descenso (records) de muchas órbitas y mide su discrepancia módulo 2^R , restringida a records mayores que un umbral para eliminar el embudo final hacia 1, que todas las órbitas comparten.

Records con $m_k >$	media de $\nu_2(3m_k + 1)$	D_2^{agg}	D_3^{agg}	D_4^{agg}
1 (con embudo)	2,067	0,0111	0,0416	0,0388
10^3	1,995	0,0007	0,0019	0,0012
10^5	1,998	0,0007	0,0009	0,0006
10^7	1,998	0,0005	0,0008	0,0007

Cuadro 2: Discrepancia agregada de las imágenes de descenso módulo 2^R , sobre los records de 10^5 arranques impares aleatorios en $[1, 10^9)$.

Observación 6.2. La Tabla 2 es un enunciado sobre familias de órbitas, del tipo $n_q \rightarrow \infty$ de la Sección 2, no sobre una órbita fija. Sugiere que, en agregado, las imágenes de descenso se reparten uniformemente, pero una discrepancia agregada pequeña es compatible con discrepancias orbitales grandes que se compensen al promediar, y no implica el criterio para ningún entero concreto.

7. El modelo de Haar para las excursiones

Esta sección describe el modelo idealizado en el que las valuaciones son i.i.d. geométricas. Ninguno de sus resultados interviene en el criterio de la Sección 4, que solo necesita una cota inferior y la obtiene por truncamiento; se incluyen porque cuantifican las excursiones típicas y delimitan qué decide el modelo probabilístico.

Sean $r_0, r_1, \dots$ i.i.d. con $P(r = j) = 2^{-j}$ para $j \geq 1$, sea $X_i = \log 3 - r_i \log 2$ y $S_k = \sum_{i < k} X_i$. Se tiene $E[X] = \log \frac{3}{4} < 0$ y $X \leq \log \frac{3}{2}$. La *longitud de excursión* es $\ell = \min\{k \geq 1 : S_k < 0\}$, y la *recompensa* de la excursión es $\sigma = \sum_{i < \ell} r_i$.

Teorema 7.1 (Cola de la longitud). *Sea $\varphi(\theta) = E[e^{\theta X}] = \frac{3^\theta}{2^{\theta+1} - 1}$. Para todo $\theta > 0$ y todo $R \geq 1$, $P(\ell > R) \leq \varphi(\theta)^R$. El mínimo de φ se alcanza en θ^* con $2^{\theta^*+1} = \log 3 / \log \frac{3}{2}$, es decir $\theta^* \approx 0,4380$, y $\varphi(\theta^*) \approx 0,9465$. Por tanto*

$$P(\ell > R) \leq e^{-cR}, \quad c = -\log \varphi(\theta^*) \approx 0,0550.$$

Demostración. Si $\ell > R$, entonces $S_R \geq 0$, y por la desigualdad de Markov

$$P(\ell > R) \leq P(e^{\theta S_R} \geq 1) \leq E[e^{\theta S_R}] = \varphi(\theta)^R.$$

Además $\varphi(\theta) = 3^\theta \sum_{j \geq 1} 2^{-(\theta+1)j} = 3^\theta / (2^{\theta+1} - 1)$, y la condición de mínimo es

$$\frac{d}{d\theta} \log \varphi = \log 3 - \frac{2^{\theta+1} \log 2}{2^{\theta+1} - 1} = 0.$$

□

Proposición 7.2 (Tasa exponencial óptima; basada en resultados clásicos). *Se cumple*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \log P(\ell > R) = -c.$$

Esquema. La demostración completa se obtiene aplicando al paseo inclinado dos resultados clásicos que no se reproducen aquí: la supervivencia de un paseo centrado de varianza finita, del orden de $R^{-1/2}$ [2], y el comportamiento de $S_R/\sqrt{R}$ condicionado a la supervivencia [3]. Indicamos únicamente el argumento que identifica el exponente. La cota superior es el Teorema 7.1. Para la inferior, bajo la medida inclinada Q con densidad $e^{\theta^* S_R}/\varphi(\theta^*)^R$ los incrementos tienen media 0 (pues $\varphi'(\theta^*) = 0$) y varianza finita, y

$$\begin{aligned} P(\ell > R) &= \varphi(\theta^*)^R E_Q[e^{-\theta^* S_R}; S_1, \dots, S_R \geq 0] \\ &\geq \varphi(\theta^*)^R e^{-\theta^* \sqrt{R}} Q(S_1, \dots, S_R \geq 0, S_R \leq \sqrt{R}). \end{aligned}$$

Para un paseo de media nula y varianza finita, la probabilidad de permanecer en $[0, \infty)$ durante R pasos decae como $R^{-1/2}$ [2], y condicionado a ello $S_R/\sqrt{R}$ tiene un límite no degenerado [3]; la última probabilidad es, por tanto, al menos $CR^{-1/2}$, y los factores $e^{-\theta^* \sqrt{R}}$ y $R^{-1/2}$ son subexponenciales. $\square$

La cola verdadera no decae, pues, con una tasa exponencial mayor que la de la cota: la diferencia entre ambas es un factor subexponencial. El cálculo exacto de la Tabla 3 es compatible con el comportamiento $P(\ell > R) \approx CR^{-3/2}e^{-cR}$ que predice la teoría de fluctuaciones.

Proposición 7.3 (Media y recompensa). $E[\ell] < \infty$ y $E[\sigma] = 2E[\ell]$.

Demostración. $E[\ell] = \sum_{R \geq 0} P(\ell > R) < \infty$ por el Teorema 7.1. Como ℓ es un tiempo de parada respecto de (r_i) con esperanza finita, la identidad de Wald [4] da $E[\sigma] = E[\ell] E[r] = 2E[\ell]$. $\square$

Proposición 7.4 (Cola de la recompensa). Para todo $x \geq 2 \log_2 3$,

$$P(\sigma > x) \leq e^{-cx/(2 \log_2 3)} + \left(\frac{x}{2 \log_2 3} + 1 \right) 2^{1-x/2}.$$

En particular, σ tiene cola exponencial.

Demostración. Mientras dura la excursión el paseo está en $[0, \infty)$, luego $S_{\ell-1} \geq 0$, es decir $\sum_{i < \ell-1} r_i \leq (\ell-1) \log_2 3$. Por tanto $\sigma \leq (\ell-1) \log_2 3 + r_{\ell-1}$. Sea $M = \lceil x/(2 \log_2 3) \rceil$. En el suceso $\{\ell \leq M\}$ se tiene $(\ell-1) \log_2 3 \leq (M-1) \log_2 3 \leq x/2$, y $\sigma > x$ exige $\max_{i < M} r_i > x/2$. Así

$$P(\sigma > x) \leq P(\ell > M) + \sum_{i < M} P(r_i > x/2) \leq e^{-cM} + M 2^{-\lfloor x/2 \rfloor},$$

y se acota $M \leq x/(2 \log_2 3) + 1$ y $2^{-\lfloor x/2 \rfloor} \leq 2^{1-x/2}$. $\square$

R	$P(\ell > R)$ exacta	cota e^{-cR}	$P(\ell > R) R^{3/2} e^{cR}$
1	0,5000	0,947	0,53
3	0,2500	0,848	1,53
5	0,1484	0,760	2,18
8	0,0896	0,644	3,15
12	0,0521	0,517	4,19
20	0,0193	0,333	5,17
50	$1,33 \cdot 10^{-3}$	0,064	7,34
100	$3,5 \cdot 10^{-5}$	$4,1 \cdot 10^{-3}$	8,43
200	—	—	9,20
400	—	—	9,78

Cuadro 3: Cola de la longitud de excursión bajo Haar, calculada exactamente por recursión sobre la distribución de $\sum r_i$ (sin simulación). La última columna crece lentamente, compatible con $P(\ell > R) \approx C R^{-3/2} e^{-cR}$. De la misma recursión, $E[\ell] \approx 3,49$ y $E[\sigma] = 2E[\ell] \approx 6,99$.

8. Conclusiones

1. El observable adecuado para estudiar una hipotética órbita divergente no puede indexarse por records, que son finitos en toda órbita, sino por el tiempo orbital.
2. La deriva orbital, y con ella la acotación de la órbita, se sigue de una desigualdad de frecuencias residuales en la escala fija 8: $\liminf (F_L(1) + 2F_L(5)) > \log_2 3 - 1$, o bien una discrepancia orbital módulo 8 inferior a 0,055. La demostración usa solo una cota inferior por truncamiento y no requiere control de colas.
3. La escala 8 es la mínima para este criterio de truncamiento: módulo 4, ni la equidistribución exacta basta.
4. Bajo Haar el criterio se cumple para casi todo punto 2-ádico; para los enteros, que forman un conjunto de medida nula, queda abierto, y es al menos tan difícil como la no divergencia.
5. En el modelo de Haar, las excursiones tienen cola exponencial con tasa óptima $c \approx 0,0550$, esperanza finita y recompensa media $2E[\ell]$; estos hechos describen el modelo, pero no son necesarios para el criterio.

Nota sobre versiones anteriores

Este escrito sustituye a las versiones de junio de 2026 de las Secciones 31.8 (*Discrepancia de las imágenes de descenso y deriva orbital*) y 31.9 (*La cola de excursión bajo Haar*). La primera definía su observable sobre los records de la órbita; como estos son finitos en toda órbita (Proposición 2.1), su esquema condicional, formulado con $J \rightarrow \infty$, no estaba definido para ninguna órbita fija, y en particular no alcanzaba a las órbitas divergentes. La segunda afirmaba que la cola verdadera de las excursiones decae más rápido que la cota exponencial; la Proposición 7.2 muestra que la tasa exponencial es la misma. Sus resultados correctos, la discrepancia agregada y la cola bajo Haar, se conservan aquí con su alcance precisado.

Referencias

- [1] J. C. Lagarias, The $3x + 1$ problem and its generalizations, *Amer. Math. Monthly* **92** (1985), no. 1, 3–23.
- [2] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. II, 2.^a ed., Wiley, 1971.
- [3] E. Bolthausen, On a functional central limit theorem for random walks conditioned to stay positive, *Ann. Probab.* **4** (1976), no. 3, 480–485.
- [4] S. Asmussen, *Applied Probability and Queues*, 2.^a ed., Springer, 2003.