Cristalización 2-ádica del hilo de Ariadna en la dinámica de Collatz

Escrito 9 de la serie sobre dinámica de Collatz

Miguel Cerdá Bennassar

Marzo de 2026

Resumen

Los Escritos 1–8 establecen la extinción *distribucional* del régimen rígido de Collatz: la masa total de la distribución $\mathcal{P}$ en la subregión estrictamente regenerativa $\{E_n \geq 1\}$ decae como $(1/3)^n$. Sin embargo, ese resultado no excluye por sí solo la existencia de una órbita excepcional confinada en $\{E_n \geq 1\}$ para todo n —el *hilo de Ariadna*. Este escrito traduce esa hipótesis en una cadena anidada de congruencias 2-ádicas que cristaliza en un único punto $\alpha \in \mathbb{Z}_2$. Se demuestra incondicionalmente que, si $E_k = 1$ eventualmente, entonces $\alpha \notin \mathbb{Z}_{>0}$. En el caso complementario, cuando $E_k \geq 2$ infinitamente a menudo, se aísla el único punto técnico residual: un criterio explícito de aparición de bits nuevos en la expansión 2-ádica de α. De este modo, la extinción orbital en el régimen rígido queda reducida a una condición aritmética precisa sobre el caso estrictamente regenerativo excedente.

Índice

1. Planteamiento: el gap orbital

1.1. Lo que dan los Escritos 1–8

Los escritos previos de esta serie establecen, para la dinámica comprimida de Collatz en el régimen rígido, los siguientes resultados principales:

- **Escritos 1–2.** Estructura 2-ádica del mapa de retorno $F\colon (\ell, a) \mapsto (\ell', a')$ y rareza del régimen rígido (densidad $2^{1-\ell} \to 0$).
- **Escritos 3–4.** Estratificación modular: exactamente dos clases de residuos módulo $2^{\ell+1}$ satisfacen $E(\ell, a) \geq 0$; no-factorización del mapa de retorno sobre ningún cociente fijo.
- **Escritos 5–6.** Extinción geométrica $(1/3)^n$ de la masa de $\mathcal{P}$ en $\{E_n \geq 1\}$; equidistribución (Ingrediente B).
- **Escritos 7–8.** Invarianza de Q_n; ley de renovación y $3/4^j$.

En conjunto, estos resultados demuestran que la distribución $\mathcal{P}$ se extingue *distribucionalmente*: la masa total en la subregión estrictamente regenerativa desaparece a tasa geométrica.

1.2. El gap: extinción distribucional vs. orbital

La extinción distribucional es una afirmación sobre la medida total de $\mathcal{P}$, no sobre órbitas individuales. En particular, no responde a la siguiente pregunta:

> ¿Puede existir un entero positivo a_0 cuya órbita regrese siempre al régimen rígido con $E_n \geq 1$, sosteniéndose indefinidamente en la subregión estrictamente regenerativa?

Llamamos *hilo de Ariadna* a tal hipotética órbita. Formalmente:

Hipótesis 1 (Hilo de Ariadna)**.** *Existe $a_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que, a lo largo de su órbita en el régimen rígido, se tiene $E_n(a_0) \geq 1$ para todo $n \geq 0$.*

El objetivo de este escrito es derivar consecuencias de la Hipótesis 1, aislar el caso residual y precisar el punto exacto donde se concentra la dificultad orbital.

2. La hipótesis se cristaliza en un punto 2-ádico

2.1. Cilindros 2-ádicos asociados a $E_n \geq 1$

Recordamos la variable de exceso:

$$E_n = \nu_2\Big(3^{\ell_n+1}\, a_n - 1\Big) - \ell_n,$$

donde $\ell_n = \nu_2(a_n - 1)$ y a_n es el parámetro tras n retornos.

Definición 2.1. *Para cada $n \geq 0$, sea*

$$C_n = \Big\{a \in \mathbb{Z}_2 : E_k(a) \geq 1 \text{ para } k = 0, \dots, n\Big\}.$$

Cada C_n es un cilindro 2-ádico, es decir, una bola cerrada en $(\mathbb{Z}_2, |\cdot|_2)$.

Lema 2.2 (Forma de los cilindros)**.** *Existe una sucesión de residuos impares (ρ_n) y una sucesión creciente de enteros (M_n) tales que*

$$C_n = \rho_n + 2^{M_n}\, \mathbb{Z}_2,$$

con

$$M_{n+1} \geq M_n + \ell_n + 2.$$

En particular, $M_n \to \infty$ y $\mu_2(C_n) = 2^{-M_n} \to 0$.

Demostración. La condición $E_0 \geq 1$ equivale a

$$\nu_2(3^{\ell_0+1}a - 1) \geq \ell_0 + 1,$$

es decir,

$$a \equiv (3^{\ell_0+1})^{-1} \pmod{2^{\ell_0+1}}.$$

Esto define

$$C_0 = \rho_0 + 2^{\ell_0+1}\mathbb{Z}_2$$

con $M_0 = \ell_0 + 1$.

En el paso inductivo, la condición $E_{n+1} \geq 1$ arrastrada hacia atrás por el mapa de retorno impone una congruencia adicional sobre a. Su profundidad aumenta al menos en $\ell_n + 2$ bits: $\ell_n + 1$ bits vienen de la condición de proximidad a -1, y el bit adicional corresponde al exceso estrictamente regenerativo. Por tanto

$$M_{n+1} \geq M_n + \ell_n + 2.$$

□

2.2. Anidamiento y convergencia 2-ádica

Proposición 2.3 (Anidamiento estricto)**.** *La sucesión $(C_n)_{n\geq 0}$ es estrictamente anidada:*

$$C_0 \supsetneq C_1 \supsetneq C_2 \supsetneq \cdots$$

con $\mu_2(C_n) = 2^{-M_n} \to 0$.

Demostración. Es consecuencia inmediata del Lema 2.2, ya que M_n es estrictamente creciente. $\square$

Teorema 2.4 (Cristalización en un punto)**.** *Si vale la Hipótesis 1, entonces*

$$\mathcal{A} := \bigcap_{n\geq 0} C_n = \{\alpha\}$$

para un único $\alpha \in \mathbb{Z}_2$, y además $a_0 = \alpha$.

Demostración. Bajo la Hipótesis 1, se tiene $a_0 \in C_n$ para todo n, luego $a_0 \in \mathcal{A}$.

Los C_n son bolas cerradas anidadas en el espacio métrico completo $(\mathbb{Z}_2, |\cdot|_2)$, y sus diámetros 2^{-M_n} tienden a cero. Por el teorema de intersección de Cantor para espacios métricos completos, la intersección es un único punto. Como a_0 pertenece a todos los C_n, ese punto debe ser precisamente a_0. $\square$

Observación 2.5. *El punto α queda determinado como límite 2-ádico:*

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \rho_n \in \mathbb{Z}_2.$$

Las congruencias acumuladas que lo definen pueden escribirse como

$$3^{\ell_k+1}\,\alpha \equiv 1 \pmod{2^{M_k}} \qquad \forall\, k \geq 0.$$

Como $M_k \to \infty$, cada bit de la expansión 2-ádica de α queda fijado por alguna de estas condiciones.

3. Balance energético y aproximaciones a -1

3.1. La identidad energética y LTE

El mapa de retorno satisface la identidad fundamental

$$\ell_{k+1} + 1 = \nu_2(c_k + 1),$$

donde

$$c_k = \frac{3^{\ell_k+1}a_k - 1}{2^{K_k-1}}$$

es el coeficiente normalizado de la excursión k-ésima. Definimos el *incremento energético* del retorno k como

$$E_k := \ell_{k+1} - \ell_k + 1 = \nu_2(c_k + 1) - \ell_k.$$

Por tanto,

$$\ell_{k+1} - \ell_k = E_k - 1, \qquad \ell_n = \ell_0 - n + \sum_{k=0}^{n-1} E_k.$$

La condición $E_k \geq 1$ equivale a

$$c_k \equiv -1 \pmod{2^{\ell_k+1}}:$$

cada retorno estrictamente regenerativo fuerza que c_k sea 2-ádicamente próximo a -1 con precisión al menos $\ell_k + 1$.

Usaremos también el teorema *lifting the exponent* (LTE) para $p = 2$:

$$\nu_2(3^m - 1) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \text{ es impar,} \\ \nu_2(m) + 2 & \text{si } m \text{ es par.} \end{cases}$$

En particular, para todo $m \geq 1$, la cantidad $\nu_2(3^m - 1)$ es finita.

3.2. Exigencia cuantitativa de regeneración media

Proposición 3.1 (Regeneración media mínima)**.** *Sea (ℓ_k, a_k) una órbita infinita en el régimen rígido con $\ell_k \geq 1$ para todo k. Entonces*

$$\sum_{j=0}^{n-1} E_j \geq n + 1 - \ell_0 \qquad \forall\, n \geq 1.$$

En particular,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} E_j \geq 1.$$

Demostración. De la identidad

$$\ell_n = \ell_0 - n + \sum_{j=0}^{n-1} E_j$$

y la hipótesis $\ell_n \geq 1$ se deduce

$$1 \leq \ell_0 - n + \sum_{j=0}^{n-1} E_j,$$

es decir,

$$\sum_{j=0}^{n-1} E_j \geq n + 1 - \ell_0.$$

Dividiendo por n y tomando límite inferior se obtiene la afirmación. □

Observación 3.2 (Deriva estructural negativa)**.** *El régimen rígido posee una* deriva estructural negativa *de una unidad por retorno: en ausencia de regeneración, ℓ_k decrece en 1 en cada paso. La supervivencia indefinida exige compensar esa deriva mediante episodios de regeneración asociados a aproximaciones profundas al punto $-1 \in \mathbb{Z}_2$.*

3.3. Deriva elemental y balance acumulado

Proposición 3.3 (Deriva elemental)**.** *La variación elemental viene dada por*

$$\Delta_k := \ell_{k+1} - \ell_k = \nu_2(c_k + 1) - \ell_k - 1.$$

En particular, bajo la Hipótesis 1,

$$\ell_{k+1} \geq \ell_k \qquad \forall\, k,$$

y por tanto $\ell_k \geq \ell_0 \geq 1$ para todo k. Además,

$$\begin{aligned}
\ell_{k+1} > \ell_k &\iff \nu_2(c_k + 1) \geq \ell_k + 2, \\
\ell_{k+1} = \ell_k &\iff \nu_2(c_k + 1) = \ell_k + 1, \\
\ell_{k+1} < \ell_k &\iff \nu_2(c_k + 1) \leq \ell_k.
\end{aligned}$$

Demostración. Basta reescribir

$$\ell_{k+1} - \ell_k = E_k - 1$$

usando

$$E_k = \nu_2(c_k + 1) - \ell_k.$$

Bajo la Hipótesis 1, $E_k \geq 1$ para todo k, luego $\Delta_k \geq 0$ y la sucesión (ℓ_k) es no decreciente. Las tres equivalencias finales se leen del signo de Δ_k. □

Observación 3.4 (Umbral de regeneración)**.** *La cantidad $\ell_k + 1$ actúa como umbral exacto de regeneración. La longitud solo puede crecer si la aproximación 2-ádica de c_k a -1 supera estrictamente el nivel ya codificado por ℓ_k.*

Proposición 3.5 (Balance acumulado)**.** *Bajo la Hipótesis 1, para todo $n \geq 1$:*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \nu_2(c_k + 1) = \sum_{k=0}^{n-1} \ell_k + \sum_{k=0}^{n-1} E_k \geq n\ell_0 + n + 1 - \ell_0.$$

En particular, la suma acumulada *de las profundidades de aproximación a -1 crece al menos linealmente con n.*

Demostración. La identidad es la suma de

$$E_k = \nu_2(c_k + 1) - \ell_k.$$

La desigualdad combina $\ell_k \geq \ell_0$ (Proposición 3.3) con

$$\sum_{k=0}^{n-1} E_k \geq n + 1 - \ell_0$$

(Proposición 3.1). □

Observación 3.6 (Tensión acumulada hacia -1)**.** *La desigualdad anterior expresa una* tensión acumulada *hacia el punto $-1 \in \mathbb{Z}_2$: la supervivencia estrictamente regenerativa exige una producción sostenida de aproximaciones profundas a ese punto crítico.*

Proposición 3.7 (Cota inferior uniforme)**.** *Bajo la Hipótesis 1, se tiene*

$$\nu_2(c_k + 1) = \ell_k + E_k \geq \ell_0 + 1 \qquad \forall\, k.$$

Además, si ocurre alguna de las dos condiciones siguientes:

(i) $\ell_k \to \infty$, *o*

(ii) E_k *es ilimitada a lo largo de una subsucesión,*

entonces la sucesión $\big(\nu_2(c_k + 1)\big)_{k \geq 0}$ *es ilimitada.*

Demostración. La primera afirmación es inmediata a partir de

$$\nu_2(c_k + 1) = \ell_k + E_k,$$

junto con $\ell_k \geq \ell_0$ y $E_k \geq 1$. Si vale (i), entonces

$$\nu_2(c_k + 1) \geq \ell_k + 1 \to \infty.$$

Si vale (ii), entonces

$$\nu_2(c_k + 1) = \ell_k + E_k$$

es ilimitada a lo largo de esa misma subsucesión. □

3.4. Bifurcación natural del problema

Bajo la Hipótesis 1, $E_k \geq 1$ para todo k. Consideramos dos casos exhaustivos:

- **Caso A:** $E_k = 1$ para todo k suficientemente grande.
- **Caso B:** $E_k \geq 2$ para infinitos k.

El Caso A es el caso límite: la media de regeneración converge exactamente a 1 y la secuencia (ℓ_k) se estabiliza. El Caso B es el caso excedente: hay retornos con regeneración estricta por encima del umbral crítico de manera infinita.

4. Caso A: estabilización y exclusión de enteros

Teorema 4.1 (Caso A: el punto cristalizado no es entero)**.** *Supongamos que bajo la Hipótesis 1 se verifica*

$$E_k = 1 \qquad \textit{para todo } k \textit{ suficientemente grande.}$$

Entonces el punto cristalizado α del Teorema 2.4 satisface

$$\alpha \notin \mathbb{Z}_{>0}.$$

Demostración. Sea k_0 tal que $E_k = 1$ para todo $k \geq k_0$. Entonces

$$\ell_{k+1} - \ell_k = E_k - 1 = 0 \qquad \forall\, k \geq k_0,$$

de modo que $\ell_k = \ell^*$ es constante a partir de k_0.

Las congruencias que definen α toman entonces la forma

$$3^{\ell^*+1}\alpha \equiv 1 \pmod{2^{M_k}} \qquad \forall\, k \geq k_0.$$

Como $M_k \to \infty$, pasando al límite en $\mathbb{Z}_2$ se obtiene

$$3^{\ell^*+1}\alpha = 1 \qquad \text{en } \mathbb{Z}_2.$$

Por tanto

$$\alpha = (3^{\ell^*+1})^{-1} \in \mathbb{Z}_2.$$

Pero 3^{ℓ^*+1} es un impar mayor que 1, y su inverso 2-ádico no pertenece a $\mathbb{Z}$: su expansión binaria es infinita. En consecuencia,

$$\alpha \notin \mathbb{Z},$$

y a fortiori

$$\alpha \notin \mathbb{Z}_{>0}.$$

□

5. Caso B: reducción al criterio del bit nuevo

5.1. Definición del fenómeno residual

El residuo ρ_{k+1} prolonga a ρ_k: coinciden módulo 2^{M_k}, pero los bits en posiciones

$$M_k, \ldots, M_{k+1} - 1$$

quedan fijados al pasar de C_k a C_{k+1}.

Definición 5.1 (Introducción de un bit nuevo)**.** *Diremos que el paso $k \to k+1$* introduce un 1 nuevo *si en la expansión binaria de ρ_{k+1} aparece al menos un bit igual a 1 en alguna de las posiciones nuevas*

$$M_k, \ldots, M_{k+1} - 1.$$

Equivalentemente, la extensión de la congruencia de nivel M_k a la de nivel M_{k+1} no es compatible con rellenar todos los bits nuevos con ceros.

Observación 5.2. *Este es el único punto técnico residual que el presente escrito no cierra de forma completamente autónoma. El Caso B quedaría resuelto si se demostrase que la presencia de infinitos índices con $E_k \geq 2$ fuerza infinitamente muchas introducciones de unos nuevos en posiciones arbitrariamente altas.*

Hipótesis 2 (Criterio del bit nuevo)**.** *Bajo la Hipótesis 1, si $E_k \geq 2$ para infinitos k, entonces para infinitos de esos índices el paso $k \to k+1$ introduce un 1 nuevo en la expansión binaria de α en una posición $\geq M_k$.*

5.2. Reducción del Caso B

Proposición 5.3 (Reducción del caso excedente)**.** *Supongamos la Hipótesis 1 y además que*

$$E_k \geq 2 \qquad \text{para infinitos } k.$$

Si vale la Hipótesis 2, entonces

$$\alpha \notin \mathbb{Z}_{>0}.$$

Demostración. Por la Hipótesis 2, existen infinitos índices k_j tales que el paso $k_j \to k_j + 1$ introduce un 1 nuevo en alguna posición $p_{k_j} \geq M_{k_j}$ de la expansión binaria de α.

Como $M_k \to \infty$, las posiciones p_{k_j} tienden a infinito. Por tanto, la expansión 2-ádica de α contiene unos en posiciones arbitrariamente altas.

Pero todo entero positivo N tiene expansión binaria finita: existe $B(N)$ tal que todos sus bits en posiciones mayores o iguales que $B(N)$ son cero. Luego ningún entero positivo puede coincidir con una expansión que contenga unos en posiciones arbitrariamente altas.

En consecuencia,

$$\alpha \notin \mathbb{Z}_{>0}.$$

□

6. Consecuencia orbital y alcance del resultado

Corolario 6.1 (Extinción orbital bajo el criterio residual)**.** *Supongamos que vale la Hipótesis 2. Entonces no existe ningún $a_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ cuya órbita en el régimen rígido satisfaga $E_n(a_0) \geq 1$ para todo $n \geq 0$.*

Demostración. Supongamos, por contradicción, que existe tal a_0. Por el Teorema 2.4, el valor inicial coincide con el punto cristalizado:

$$a_0 = \alpha.$$

Si $E_k = 1$ eventualmente, el Teorema 4.1 implica

$$\alpha \notin \mathbb{Z}_{>0},$$

contradicción.

Si $E_k \geq 2$ para infinitos k, la Proposición 5.3 implica igualmente

$$\alpha \notin \mathbb{Z}_{>0},$$

contradicción.

En ambos casos se llega a contradicción; por tanto no existe tal a_0. □

Observación 6.2 (Lectura del corolario)**.** *El argumento anterior establece una reducción precisa: la extinción orbital del régimen rígido queda demostrada en el Caso A y queda reducida, en el Caso B, a la validez del criterio explícito de aparición de bits nuevos.*

7. Conexión con la serie original (Escritos I–VIII)

El argumento de este escrito formaliza la intuición que recorre los Escritos I–VIII bajo la forma de *cabezal lector 2-ádico* y *presupuesto de bits.*

En la serie original, el presupuesto aparece como una obstrucción a que la dinámica comprimida produzca indefinidamente decisiones binarias independientes a partir de una entrada finita. El Escrito VII condiciona ese cierre a la regularidad bi-Lipschitz de la parametrización de entrada; el Escrito VIII documenta con precisión el gap residual.

El presente Escrito 9 reemplaza esa intuición por una formulación estática en $\mathbb{Z}_2$: la hipótesis de una órbita infinitamente regenerativa determina una cadena anidada de cilindros cuya intersección es un único punto α. El Caso A se cierra de forma incondicional, al identificarse α como una inversa 2-ádica no entera. El Caso B queda reducido al problema explícito de demostrar que los retornos excedentes fuerzan la aparición de unos nuevos en posiciones arbitrariamente altas de la expansión 2-ádica de α.

Alcance y frontera del resultado

Los Escritos 1–9 proporcionan conjuntamente una descripción muy precisa de la dinámica *dentro* del régimen rígido: estructura 2-ádica del mapa de retorno, rareza del régimen, estratificación modular, extinción distribucional y, en este escrito, cristalización 2-ádica del hilo de Ariadna y cierre completo del Caso A.

El punto técnico residual se concentra en el Caso B: si los retornos con $E_k \geq 2$ infinitamente a menudo fuerzan efectivamente bits nuevos en posiciones arbitrariamente altas, entonces la extinción orbital en el régimen rígido queda cerrada.

Lo que permanece fuera del alcance de esta serie es la conexión de este análisis con la dinámica global de Collatz: no se demuestra aquí que toda órbita entre eventualmente en el régimen rígido, ni que la salida de él conduzca necesariamente a la convergencia a 1. Determinar cómo se acopla el subsistema rígido con la dinámica global sigue siendo el obstáculo central entre los resultados de esta serie y la conjetura de Collatz en su forma completa.

A. Estimación de M_k y ejemplos

A.1. Verificación de la cota $M_k \geq 2(k+1)$

Del Lema 2.2, $M_0 = \ell_0 + 1$ y

$$M_{k+1} \geq M_k + \ell_k + 2 \geq M_k + 2,$$

luego

$$M_k \geq M_0 + 2k = \ell_0 + 1 + 2k \geq 2(k+1).$$

Verificamos explícitamente con $a_0 = 3$, donde

$$\ell_0 = \nu_2(3-1) = \nu_2(2) = 1.$$

- **Paso $k = 0$.**

  $$M_0 = \ell_0 + 1 = 2.$$

  Cota:

  $$M_0 = 2 \geq 2(0+1) = 2.$$

- **Paso $k = 1$: cálculo de $F(3)$.** La excursión comprimida desde $a_0 = 3$ aplica

  $$T(n) = \frac{3n+1}{2^{\nu_2(3n+1)}}.$$

  Entonces

  $$T(3) = \frac{3 \cdot 3 + 1}{2^{\nu_2(10)}} = \frac{10}{2} = 5.$$

  Por tanto $F(3) = 5$ y

  $$\ell_1 = \nu_2(5-1) = \nu_2(4) = 2.$$

  Del Lema 2.2,

  $$M_1 \geq M_0 + \ell_0 + 2 = 2 + 1 + 2 = 5.$$

  Cota:

  $$M_1 \geq 5 \geq 2(1+1) = 4.$$

- **Paso $k = 2$: continuación.**

  $$T(5) = \frac{15+1}{2^{\nu_2(16)}} = \frac{16}{16} = 1.$$

  La órbita de 3 alcanza 1 en dos pasos comprimidos. Inductivamente,

  $$M_2 \geq M_1 + \ell_1 + 2 \geq 5 + 2 + 2 = 9 \geq 2(2+1) = 6.$$

A.2. Ilustración del Caso A con $\ell^* = 1$

Supongamos que la órbita estabiliza en $\ell_k = 1$ para todo $k \geq k_0$. Entonces $E_k = 1$ para todo $k \geq k_0$ y las congruencias imponen

$$3^2\alpha \equiv 1 \pmod{2^{M_k}} \qquad \forall\, k \geq k_0.$$

En el límite,

$$9\alpha = 1 \qquad \text{en } \mathbb{Z}_2,$$

es decir,

$$\alpha = 9^{-1}.$$

Este elemento pertenece a $\mathbb{Z}_2$ pero no a $\mathbb{Z}$; su expansión binaria es infinita. En particular,

$$\alpha \notin \mathbb{Z}_{>0}.$$

A.3. Ilustración del criterio residual

En el Caso B, el punto pendiente no es ya la cristalización en α, sino demostrar que los pasos con $E_k \geq 2$ fuerzan verdaderamente la aparición de unos nuevos en posiciones altas de la expansión binaria de α. La Hipótesis 2 aísla exactamente ese fenómeno.