

Balance por episodios, rigidez modular y reducción del gap orbital

Miguel Cerdá Bennassar

Marzo de 2026

Resumen

Introducimos la descomposición de una órbita en la región privilegiada $\mathcal{P}$ en *episodios*, cada uno formado por una visita umbral ($E_k = 0$) seguida de un bloque regenerativo ($E_k \geq 1$). Definimos el *balance* de cada episodio como la contribución neta al cociente de decaimiento $N_n - S_n \log_2 3$. Probamos que el balance es positivo en casi todos los casos y que el único escenario con balance negativo es el par crítico ($\ell_u \geq 3$, $E' = 1$, $L = 1$). Mostramos que la persistencia de ese escenario impone una rigidez modular creciente sobre a_0 , y reformulamos el gap orbital con precisión: la existencia de una órbita infinita en $\mathcal{P}$ equivale a la existencia de un entero positivo a_0 cuya secuencia de episodios tenga balance acumulado acotado superiormente.

1. Contexto y notación

Retomamos la notación del Escrito 9. Sobre una órbita con $(\ell_n)_{n \geq 0}$, $(E_n)_{n \geq 0}$, $(m_n)_{n \geq 0}$ con $m_n = \ell_n + E_n$, definimos

$$S_n = \sum_{k=0}^n (\ell_k + 1), \quad N_n = \sum_{k=0}^n (m_k + \ell_{k+1} + 1).$$

El argumento central del Escrito 9 reposa en el decaimiento $3^{S_n}/2^{N_n} \rightarrow 0$, garantizado por $N_n - S_n \log_2 3 \rightarrow +\infty$.

Definimos la *contribución por paso*

$$\delta_k := m_k + \ell_{k+1} + 1 - (\ell_k + 1) \log_2 3 = E_k + \ell_{k+1} + \ell_k(1 - \log_2 3) + (1 - \log_2 3) + 1, \quad (1)$$

de modo que $N_n - S_n \log_2 3 = \sum_{k=0}^n \delta_k$.

Con $\alpha := 2 - \log_2 3 \approx 0,415$, la variable centrada satisface $C_k = E_k + \alpha(\ell_k + 1)$, y la relación entre δ_k y C_k es

$$\delta_k = C_k + \ell_{k+1} - \ell_k + (1 - 2\alpha).$$

2. Clasificación de pasos y sus balances

Definición 2.1 (Régimen de un paso). *Un paso k es regenerativo si $E_k \geq 1$, y umbral si $E_k = 0$.*

Lema 2.2 (Balance de un paso regenerativo). *Si $E_k \geq 1$ y $\ell_k, \ell_{k+1} \geq 1$, entonces*

$$\delta_k \geq 2\alpha = 2(2 - \log_2 3) \approx 0,830.$$

El mínimo 2α se alcanza en $(\ell_k = 1, E_k = 1, \ell_{k+1} = 1)$.

Demostración. $\delta_k = E_k + \ell_{k+1} + \ell_k(1 - \log_2 3) + (1 - \log_2 3) + 1$. Con $E_k \geq 1$, $\ell_{k+1} \geq 1$ y $\ell_k \geq 1$:

$$\delta_k \geq 1 + 1 + (1 - \log_2 3)(1 + 1) = 2(2 - \log_2 3) = 2\alpha.$$

□

Lema 2.3 (Balance de un paso umbral). *Si $E_k = 0$ y $\ell_{k+1} = 1$ (lo que ocurre cuando $b_k = (3^{\ell_k+1}a_k - 1)/2^{\ell_k}$ satisface $b_k \equiv 3 \pmod{4}$), entonces*

$$\delta_k^{(u)}(\ell_k) := \delta_k = \alpha - (\ell_k + 1)(\log_2 3 - 1) < 0. \quad (2)$$

Los valores numéricos son $\delta^{(u)}(1) \approx -0,170$, $\delta^{(u)}(2) \approx -0,755$, $\delta^{(u)}(3) \approx -1,340$, con $\delta^{(u)}(\ell) \approx -0,585\ell - 0,170$. Si $b_k \not\equiv 3 \pmod{4}$, la órbita sale de $\mathcal{P}$.

Demostración. Con $E_k = 0$, $\ell_{k+1} = 1$ en (1): $\delta_k = 0 + 1 + \ell_k(1 - \log_2 3) + (1 - \log_2 3) + 1 = 2 - (1 + \ell_k)(\log_2 3 - 1) - 2(\log_2 3 - 1) \dots$ directo: $\delta_k = (\ell_k + 1)(1 - \log_2 3) + 2 - \log_2 3 = \alpha - (\ell_k + 1)(\log_2 3 - 1)$. Como $\log_2 3 - 1 \approx 0,585 > 0$, se tiene $\delta_k < 0$ para todo $\ell_k \geq 1$. □

3. Episodios y su balance neto

Definición 3.1 (Episodio). *Un episodio es un bloque de pasos consecutivos formado por exactamente una visita umbral seguida de $L \geq 1$ pasos regenerativos. El balance del episodio es $\Delta := \delta^{(u)}(\ell_u) + \sum_{j=1}^L \delta_j^{(r)}$.*

Proposición 3.2 (Balance positivo en la mayoría de episodios). *Sea un episodio con nivel umbral ℓ_u y longitud regenerativa L .*

1. Si $\ell_u \leq 2$, el balance es positivo para cualquier $L \geq 1$.
2. Si $\ell_u \geq 3$ y $L \geq 2$, el balance es positivo.
3. Si $\ell_u \geq 3$, $L = 1$ y $\bar{E} \geq 2$, el balance es positivo.
4. Caso crítico: si $\ell_u \geq 3$, $L = 1$, $\bar{E} = 1$, el balance es negativo: $\Delta \approx -0,510 - 0,585(\ell_u - 3)$.

La condición general para $\Delta > 0$ es

$$L \geq \left\lceil \frac{|\delta^{(u)}(\ell_u)|}{2\alpha} \right\rceil.$$

Demostración. Por los Lemas 2.2 y 2.3, $\Delta \geq \delta^{(u)}(\ell_u) + L \cdot 2\alpha$. (1) $|\delta^{(u)}(\ell_u)| \leq \delta^{(u)}(2) \approx 0,755 < 2\alpha \cdot 1$. (2) $L \cdot 2\alpha \geq 2 \cdot 2\alpha \approx 1,660 > |\delta^{(u)}(3)| \approx 1,340$. Para $\ell_u \geq 4$: $L \geq 2$ y $|\delta^{(u)}(\ell_u)|/2\alpha \leq (\ell_u + 1) \cdot 0,585/0,830 \approx 0,705(\ell_u + 1)$; con $L = 2$ queda positivo hasta $\ell_u = 3$ exacto. (3) Con $\bar{E} \geq 2$: $\delta^{(r)} \geq 1 + 1 + 2(1 - \log_2 3) + 1 = 2\alpha + 1 > 1,830$; basta $L = 1$ para $\ell_u = 3$. (4) Directo de los lemas. □

4. Rigidez modular

Lema 4.1 (Rigidez por visita umbral). *Si el paso k es umbral con $\ell_k = \ell_u$, entonces*

$$3^{\ell_u+1}a_k \equiv 1 \pmod{2^{\ell_u}}, \quad 3^{\ell_u+1}a_k \not\equiv 1 \pmod{2^{\ell_u+1}}.$$

Esto fija a_k en una clase de residuos módulo 2^{ℓ_u} .

Lema 4.2 (Acumulación de rigidez). *Sea una órbita que visita la zona umbral en los pasos $k_1 < k_2 < \dots$ con niveles $\ell_u^{(j)} \geq 3$. Entonces a_0 queda determinado módulo 2^{M_j} con $M_j \geq 3j$.*

En efecto, cada condición sobre a_{k_j} fija una congruencia sobre a_0 . Como a_{k_j} se expresa como función afín de a_0 con denominador $2^{N_{k_j}-1}$, la congruencia se transporta hacia atrás preservando al menos $\ell_u^{(j)} \geq 3$ bits de precisión.

5. Clases límite en $\mathbb{Z}_2$

Lema 5.1 (Criterio de entereza para una clase límite). *Sea una cadena compatible de congruencias $a_0 \equiv c_J \pmod{2^{M_J}}$ con $M_J \rightarrow \infty$. Existe un único límite $\hat{a}_0 \in \mathbb{Z}_2$. Este límite pertenece a $\mathbb{Z}_{>0}$ si y sólo si la expansión 2-ádica de $\hat{a}_0$ es finita, equivalentemente, los residuos $c_J \pmod{2^{M_J}}$ coinciden eventualmente con los de un entero positivo fijo.*

Demostración. La unicidad del límite es la completitud de $\mathbb{Z}_2$. Para la caracterización: $\hat{a}_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ si y sólo si $\hat{a}_0$ es un entero positivo ordinario, lo que equivale a que su expansión 2-ádica $\hat{a}_0 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k 2^k$ sea finita (sólo finitos $b_k \neq 0$), es decir, $\hat{a}_0 \in \mathbb{Z}_{>0} \subset \mathbb{Z}_2$. Esto ocurre si y sólo si $c_J = \hat{a}_0$ para J suficientemente grande. $\square$

6. Reducción del gap

Teorema 6.1 (Reducción del gap orbital). *La existencia de una órbita infinita en $\mathcal{P}$ equivale a la existencia de un entero positivo impar a_0 cuya secuencia de episodios tiene balance acumulado acotado superiormente.*

Corolario 6.2 (Escenario crítico). *El único escenario en que el balance puede mantenerse acotado es el formado exclusivamente por episodios críticos ($\ell_u \geq 3, L = 1, E' = 1$). Cualquier episodio no crítico contribuye $\Delta > 0$ al balance.*

Teorema 6.3 (Incompatibilidad del escenario crítico). *No existe ningún entero positivo impar a_0 cuya órbita consista exclusivamente en episodios críticos repitiéndose indefinidamente.*

Prueba parcial. Por el Lema 4.2, una órbita con J episodios críticos satisface $a_0 \equiv c_J \pmod{2^{3J}}$. La cadena (c_J) converge en $\mathbb{Z}_2$ a un único $\hat{a}_0 \in \mathbb{Z}_2$ (Lema 5.1). Por el Escrito 11, el límite de la cadena bajo el mapa crítico T_ℓ es el punto fijo $a_\ell^* = (9 + 2^{\ell+1})/(3^{\ell+3} - 2^{\ell+2}) \in (0, 1)$, que no es un entero positivo. Por el Lema 5.1, $\hat{a}_0 \notin \mathbb{Z}_{>0}$. $\square$

7. Discusión

El Escrito 10 reduce el gap orbital a un problema preciso sobre la compatibilidad entre clases límite en $\mathbb{Z}_2$ y enteros positivos. El Escrito 11 cierra el caso de episodios críticos consecutivos mostrando que el punto fijo del mapa crítico pertenece a $(0, 1)$ y no puede ser un entero positivo.