

Tricotomía del balance acumulado y reducción al problema clásico

Miguel Cerdá Bennassar

Marzo de 2026

Resumen

Completamos el análisis de órbitas con infinitos episodios críticos no consecutivos mediante una tricotomía sobre el comportamiento asintótico de la suma $\sum \delta_k$. El Caso A ($\sum \delta_k \rightarrow +\infty$) está cerrado por el Escrito 9. El Caso B ($\sum \delta_k$ acotado superiormente) queda cerrado en este escrito: la acotación de $3^{S_n}/2^{N_n}$ implica acotación de los valores a_{k_j} , en contradicción directa con la expansión real del mapa crítico T_ℓ . El Caso C ($\sum \delta_k \rightarrow -\infty$) corresponde exactamente a órbitas divergentes, equivalente al problema clásico abierto. Los Escritos 9–12 establecen así que la Conjetura de Collatz es equivalente a la ausencia de órbitas no acotadas.

1. Tricotomía del balance acumulado

Mantenemos la notación de los Escritos 9–11. La identidad central del Escrito 9 es:

$$a_{n+1} = a_0 \frac{3^{S_n}}{2^{N_n}} + r_n, \quad (1)$$

con $r_n \leq 3/7 < 1$ (Corolario 3.6 del Escrito 9) y

$$\frac{3^{S_n}}{2^{N_n}} = 2^{-(N_n - S_n \log_2 3)} = 2^{-\sum_{k=0}^n \delta_k}.$$

El comportamiento asintótico de $\Sigma_n := \sum_{k=0}^n \delta_k$ determina el destino de la órbita.

Teorema 1.1 (Tricotomía). *Sea una órbita con infinitos episodios críticos. Exactamente uno de los tres casos siguientes se produce:*

1. **Caso A:** $\Sigma_n \rightarrow +\infty$. Entonces $3^{S_n}/2^{N_n} \rightarrow 0$ y la identidad (1) da $a_{n+1} < 1$ para n grande, contradiciendo $a_{n+1} \geq 1$.
2. **Caso B:** $\liminf_n \Sigma_n > -\infty$ (la sucesión está acotada inferiormente). Entonces $3^{S_n}/2^{N_n} = 2^{-\Sigma_n} \leq 2^K$ para cierta constante K , y los valores a_{k_j} permanecen acotados superiormente.
3. **Caso C:** $\Sigma_n \rightarrow -\infty$. Entonces $3^{S_n}/2^{N_n} \rightarrow +\infty$ y la órbita diverge: $a_{n+1} \rightarrow +\infty$.

Los Casos A, B, C se suceden en orden de prioridad: si no ocurre A y no ocurre B, entonces ocurre C.

2. Cierre del Caso B

Teorema 2.1 (Incompatibilidad del Caso B). *El Caso B de la Tricotomía 1.1 no puede ocurrir si la órbita contiene infinitos episodios críticos con $\ell_u \geq 3$.*

Demostración. Supongamos $\liminf_n \Sigma_n > -\infty$, es decir $\Sigma_n \geq -K$ para cierta constante $K \geq 0$ y todo n . Sean $k_1 < k_2 < \dots$ los pasos de inicio de los episodios críticos.

Acotación superior de a_{k_j} por la identidad. En el paso $n = k_j - 1$:

$$a_{k_j} = a_0 \frac{3^{S_{k_j-1}}}{2^{N_{k_j-1}}} + r_{k_j-1} = a_0 \cdot 2^{-\Sigma_{k_j-1}} + r_{k_j-1} \leq a_0 \cdot 2^K + \frac{3}{7} =: M < \infty.$$

Luego $a_{k_j} \leq M$ para todo j .

Crecimiento ilimitado por la expansión real. Por el Corolario del Escrito 11, cada episodio crítico de nivel ℓ satisface $T_\ell(a) > a$ para todo $a > a_\ell^*$. Como $a_{k_j} \geq 1 > a_\ell^*$, se tiene $a_{k_{j+1}} \geq \lambda_\ell a_{k_j}$ con $\lambda_\ell \geq 729/32 > 22$, luego

$$a_{k_j} \geq \lambda_\ell^{j-1} a_{k_1} \rightarrow +\infty.$$

Contradicción. $a_{k_j} \leq M$ y $a_{k_j} \rightarrow +\infty$ son incompatibles. □

Corolario 2.2. *Si la órbita tiene infinitos episodios críticos y no satisface el Caso A, entonces $\liminf_n \Sigma_n = -\infty$: el Caso B no ocurre y la órbita está necesariamente en el Caso C.*

3. El Caso C y las órbitas divergentes

Proposición 3.1 (Consistencia interna del Caso C). *El Caso C es internamente consistente: $\Sigma_n \rightarrow -\infty$ implica $a_{k_j} \rightarrow +\infty$, lo que es compatible con la expansión real del mapa crítico.*

Demostración. Con $\Sigma_n \rightarrow -\infty$: $3^{S_n}/2^{N_n} \rightarrow +\infty$. De la identidad (1): $a_{n+1} \rightarrow +\infty$. Por otro lado, $a_{k_j} \geq \lambda_\ell^{j-1} a_{k_1} \rightarrow +\infty$. Ambas estimaciones son mutuamente compatibles: la tasa de crecimiento de a_{k_j} impone $\Sigma_{k_j-1} \approx -j \log_2 \lambda_\ell$, que es efectivamente $\rightarrow -\infty$ al ritmo $\log_2 \lambda_\ell \approx 4,51$ por episodio. □

Teorema 3.2 (Equivalencia con órbitas divergentes). *Las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *La Conjetura de Collatz es verdadera.*
2. *No existe ningún entero positivo impar a_0 con órbita no acotada ($a_n \rightarrow +\infty$).*
3. *El Caso C de la Tricotomía no ocurre para ningún $a_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2): si toda órbita alcanza 1, ninguna diverge. (2) $\Rightarrow$ (3): el Caso C produce $a_{n+1} \rightarrow +\infty$. (3) $\Rightarrow$ (1): si el Caso C no ocurre, toda órbita en la región privilegiada $\mathcal{P}$ satisface el Caso A o el Caso B. El Caso B queda excluido por el Teorema 2.1. Luego toda órbita en $\mathcal{P}$ satisface el Caso A, y el argumento del Escrito 9 produce la contradicción $a_{n+1} < 1$, que fuerza a la órbita a abandonar $\mathcal{P}$ en tiempo finito. Fuera de $\mathcal{P}$ la órbita sigue el régimen estándar de Collatz. □

4. Balance de los Escritos 9–12

Los cuatro escritos establecen conjuntamente el siguiente resultado:

Teorema 4.1 (Reducción completa). *Sea a_0 un entero positivo impar. Su órbita bajo la función de Collatz satisface exactamente una de las siguientes alternativas:*

1. *La órbita entra en la región $\mathcal{P}$ y acumula balance $\Sigma_n \rightarrow +\infty$: termina en 1 (Escrito 9, Caso A).*

2. *La órbita tiene infinitos episodios críticos acumulando balance acotado: imposible (Escrito 12, Caso B).*

3. *La órbita tiene infinitos episodios críticos con $\Sigma_n \rightarrow -\infty$: la órbita diverge.*

La Conjetura de Collatz equivale a que la alternativa (3) no ocurra para ningún a_0 .

Lo que se ha cerrado (Escritos 9–12):

- Toda órbita con $E_k > 0$ siempre termina.
- Toda órbita con infinitos episodios críticos y balance acotado es imposible.
- La barrera exacta $\varphi(\ell) = 3/(7 \cdot 2^{\ell-1})$ es la única solución mínima de la ecuación funcional de invariancia.
- El único punto fijo del sistema es $3/7$, alcanzado en la columna crítica ($\ell = 1, E = 1, \ell'$).

Lo que queda (el núcleo duro):

No existe ningún entero positivo con órbita de Collatz no acotada.

Esta afirmación es equivalente a la Conjetura de Collatz, y es el problema que ha resistido todos los intentos desde 1937. Los presentes escritos no lo resuelven, pero lo aíslan con precisión: todo lo demás está cerrado.