

Observación estructural sobre la rareza del régimen rígido

Miguel Cerdá Bennassar

Marzo de 2026

Resumen

El régimen rígido de la dinámica de Collatz es la fase en que el parámetro inicial ha sido completamente leído y la evolución queda gobernada por un sistema autónomo. Este trabajo expone de forma concisa la estructura de dicho régimen: el mapa de retorno F que lo define, el atractor 2-ádico $-1 \in \mathbb{Z}_2$ hacia el que convergen las órbitas de longitud no acotada, y las condiciones modulares extremadamente restrictivas que gobiernan las posibles recargas energéticas. Se identifica con precisión el obstáculo que impide cerrar el argumento: la regularidad bi-Lipschitz de la parametrización de entrada $t \mapsto p(t)$.

1. El sistema autónomo

Una vez agotado el soporte binario del parámetro inicial $r_0 \in \mathbb{N}$, las restricciones cilíndricas impuestas por cada excursión sobre r_0 se trivializan. La dinámica entra en el *régimen rígido*: un régimen en que la evolución no depende ya del estado de partida y queda gobernada por un sistema completamente autónomo.

El estado del sistema en cada entrada a una excursión en la rama C_1 se describe mediante un par

$$(\ell, a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}_2^\times,$$

donde $p = -1 + 2^{\ell+1}a$, con $\ell = \nu_2(p+1) - 1$ midiendo la longitud de la excursión y a codificando la parte impar del estado.

La dinámica induce el *mapa de retorno*

$$F: (\ell, a) \mapsto (\ell', a'),$$

obtenido a partir de las relaciones aritméticas de la dinámica comprimida $D(x) = (3x+1)/2^{\nu_2(3x+1)}$. Explícitamente:

$$\begin{aligned} K-1 &= \nu_2(3^{\ell+1}a-1), & c &= \frac{3^{\ell+1}a-1}{2^{K-1}} \quad (c \text{ impar}), \\ \ell' &= \nu_2(c+1)-1, & a' &= \frac{c+1}{2^{\ell'+1}}. \end{aligned}$$

La equivalencia central de la serie [1] establece que la conjetura de Collatz es equivalente a la no existencia de órbitas infinitas de F en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_{\text{impar}}$. El régimen rígido no es una simplificación del problema: *es el problema*.

2. El atractor 2-ádico

El punto $-1 \in \mathbb{Z}_2$ juega un papel singular en la dinámica. En primer lugar, es un punto fijo de la dinámica comprimida extendida a $\mathbb{Z}_2$: $3 \cdot (-1) + 1 = -2$, cuya parte impar es nuevamente -1 . En segundo lugar, su expansión binaria es $-1 = \dots 1111_2$, de modo que $\nu_2(-1 + 1) = \infty$, es decir, la energía 2-ádica $E := \nu_2(p + 1)$ es infinita en -1 .

Proposición 2.1. *Sea (p_n) una órbita en el régimen rígido. Entonces*

$$\ell_n \rightarrow \infty \iff p_n \rightarrow -1 \text{ en } \mathbb{Z}_2.$$

Demostración. Por definición $p_n + 1 = 2^{\ell_n+1}a_n$ con a_n impar, de modo que $\nu_2(p_n + 1) = \ell_n + 1$. La convergencia $p_n \rightarrow -1$ en $\mathbb{Z}_2$ equivale a $\nu_2(p_n + 1) \rightarrow \infty$, lo que equivale a $\ell_n \rightarrow \infty$. $\square$

Desde el punto de vista arquimediano la situación es opuesta. Si $\ell_n \rightarrow \infty$ y $a_n \geq 1$, entonces

$$p_n = -1 + 2^{\ell_n+1}a_n \geq 2^{\ell_n+1} - 1 \longrightarrow \infty.$$

Las órbitas de longitud no acotada presentan por tanto un comportamiento dual:

- convergen hacia -1 en la métrica 2-ádica,
- divergen hacia $+\infty$ en la norma arquimediana.

Esta tensión entre normas es el mecanismo dinámico central: el único punto al que la órbita puede aproximarse en $\mathbb{Z}_2$ es estrictamente negativo y externo a $\mathbb{N}$. Cuanto más cerca de -1 en $\mathbb{Z}_2$, mayor debe ser el valor entero de p . El sistema no puede alcanzar -1 desde $\mathbb{N}$.

3. Recargas energéticas y condiciones modulares

Durante una excursión de longitud ℓ en C_1 , la energía 2-ádica $E = \nu_2(p + 1)$ disminuye exactamente en una unidad por paso. Para que la sucesión de longitudes (ℓ_n) no decrezca indefinidamente es necesario que se produzcan *recargas*: momentos en que $\ell' \geq \ell$.

La condición de regeneración $\ell' \geq \ell$ equivale a $c \equiv -1 \pmod{2^{\ell+1}}$, que en términos del parámetro a se traduce en

$$a \equiv a_\ell^* := 3^{-(\ell+1)}(1 - 2^{K-1}) \pmod{2^\ell}.$$

Esta condición es extremadamente restrictiva por razones de estructura de grupo. Para $n \geq 3$ se tiene

$$(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2^{n-2},$$

donde el elemento 3 genera el factor cíclico $\mathbb{Z}/2^{n-2}$ y el elemento -1 genera el factor $\mathbb{Z}/2$. Como -1 no pertenece al subgrupo generado por 3, se tiene $3^m \not\equiv -1 \pmod{2^n}$ para todo $m \geq 0$ y $n \geq 3$. La clase regeneradora a_ℓ^* es por tanto siempre distinta de -1 módulo 2^ℓ .

En consecuencia, para cada nivel ℓ existe exactamente una clase de residuo compatible con la regeneración. En la fase inicial de la órbita, la lectura progresiva de bits de r_0 puede satisfacer esas condiciones sucesivamente. Pero en el régimen rígido no existe ningún parámetro libre: las condiciones deben satisfacerse de forma autónoma o no satisfacerse en absoluto.

Una órbita infinita en el régimen rígido que requiera recargas energéticas sostenidas debe satisfacer una cadena infinita de congruencias

$$a_j \equiv a_{\ell_j}^* \pmod{2^{\ell_j}}, \quad j = 1, 2, 3, \dots,$$

donde la precisión exigida crece sin cota. Desde el punto de vista 2-ádico, esto es exactamente la aproximación progresiva al punto -1 .

4. El *gap* bi-Lipschitz

El análisis de las secciones anteriores reduce el problema a la siguiente pregunta: ¿puede el sistema autónomo F mantenerse indefinidamente en órbitas con $\ell_n \rightarrow \infty$?

Para responder negativamente sería suficiente transferir la convergencia 2-ádica $p(t_j) \rightarrow -1$ al espacio de parámetros de entrada. Si la parametrización $t \mapsto p(t)$ fuera bi-Lipschitz en $\mathbb{Z}_2$, es decir, si existieran constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$C_1 |t_1 - t_2|_2 \leq |p(t_1) - p(t_2)|_2 \leq C_2 |t_1 - t_2|_2$$

para todos los parámetros relevantes, entonces la convergencia $p(t_j) \rightarrow -1$ implicaría automáticamente $t_j \rightarrow t^*$ en $\mathbb{Z}_2$, donde t^* es la única preimagen de -1 . La órbita del sistema autónomo quedaría forzada a converger a un único punto del espacio de parámetros.

El problema es que esa propiedad no está establecida para la parametrización inducida por la dinámica de Collatz en el régimen rígido. La posible falta de control sobre la distorsión 2-ádica del mapa $t \mapsto p(t)$ constituye el obstáculo que impide cerrar el argumento.

Problema abierto 4.1 (*gap* bi-Lipschitz). Establecer que la parametrización de entrada $t \mapsto p(t)$ del régimen rígido es bi-Lipschitz en la métrica 2-ádica.

Sin esta propiedad, la aproximación de $p(t_j)$ a -1 no se traduce en aproximación de t_j a t^* . La conjetura de Collatz se reduciría entonces a descartar que la recursión determinista $\gamma_j = t_j$ pueda aproximarse a t^* sin que la órbita converja a 1; pero ese descarte requiere precisamente el control bi-Lipschitz que falta.

Observación 4.2. Bajo la hipótesis más débil de equidistribución de la órbita (a_j) dentro de su componente ergódica en $\mathbb{Z}_2^\times$, la existencia de una medida invariante en $\mathbb{N}$ sería incompatible con $\mu(\{-1\}) = 0$, pues la dinámica forzaría concentración en un punto de medida nula. Esta vía heurística no constituye una demostración, pero orienta la estructura del obstáculo restante.

Referencias

- [1] M. Cerdá Bennassar, *Estructura 2-ádica y régimen rígido en la dinámica de Collatz*, Preprint, Marzo de 2026. [doi:10.5281/zenodo.18874277](https://doi.org/10.5281/zenodo.18874277)