

No factorización residual del mapa de retorno

Resultado negativo sobre la estructura 2-ádica de F

Miguel Cerdá Bennassar

6 de marzo de 2026

Contexto

Sea F el mapa de retorno del régimen rígido de la dinámica de Collatz, definido sobre pares (ℓ, a) con $\ell \geq 0$ y a impar positivo por

$$\begin{aligned} K &:= \nu_2(3^{\ell+1}a - 1) + 1, \\ c &:= \frac{3^{\ell+1}a - 1}{2^{K-1}}, \quad c \text{ impar}, \\ \ell' &:= \nu_2(c + 1) - 1, \\ a' &:= \frac{c + 1}{2^{\ell'+1}}, \end{aligned}$$

de modo que $F(\ell, a) = (\ell', a')$.

La región privilegiada global es

$$\mathcal{P} := \bigcup_{\ell \geq 1} \{\ell\} \times \mathcal{P}_\ell, \quad \mathcal{P}_\ell := \{a \bmod 2^{\ell+1} : E(\ell, a) \geq 0\},$$

donde $E(\ell, a) := \nu_2(3^{\ell+1}a - 1) - \ell$.

Una pregunta natural para estudiar la invariancia de $\mathcal{P}$ bajo F es:

¿Existe alguna información 2-ádica finita y uniforme sobre a que determine el signo de $E(\ell', a')$?

La presente nota responde negativamente a esta pregunta, de forma precisa.

Resultado principal

Proposición 0.1 (No factorización residual de F). *Para ningún entero $C \geq 0$ fijo existe una función bien definida*

$$\sigma : \{(\ell, [a]_{2^{\ell+C}}) : (\ell, a) \in \mathcal{P}\} \longrightarrow \{+, -\}$$

tal que $\sigma(\ell, [a]_{2^{\ell+C}}) = \text{sign}(E(\ell', a'))$ para todo $(\ell, a) \in \mathcal{P}$.

En otras palabras, el signo de $E(\ell', a')$ no está determinado por la clase residual de a módulo ninguna potencia de 2 uniformemente acotada en función de ℓ .

Demostración. Por la fórmula de F , se tiene

$$c = \frac{3^{\ell+1}a - 1}{2^{K-1}}, \quad K - 1 = \nu_2(3^{\ell+1}a - 1).$$

La clase $[a]_{2^m}$ determina $3^{\ell+1}a \bmod 2^m$ y, con ello, $c \bmod 2^{m-(K-1)}$ siempre que $m > K-1$. Para conocer $\text{sign}(E(\ell', a'))$ se necesita conocer $E(\ell', a') = \nu_2(3^{\ell'+1}a' - 1) - \ell'$, lo que requiere determinar $a' \bmod 2^{\ell'+1}$, equivalentemente $c \bmod 2^{\ell'+2}$, equivalentemente $a \bmod 2^{K-1+\ell'+2}$.

La profundidad requerida es pues $K - 1 + \ell' + 2$. Dentro de cada clase privilegiada, la condición

$$3^{\ell+1}a \equiv 1 \pmod{2^\ell}$$

admite infinitos levantamientos $a = a_\ell^* + k \cdot 2^\ell$, para los cuales la valuación $\nu_2(3^{\ell+1}a - 1)$ puede hacerse arbitrariamente grande mediante cancelaciones adicionales. Por tanto $K - 1 = \nu_2(3^{\ell+1}a - 1)$ y, con él, $\ell' = \nu_2(c + 1) - 1$ son ilimitados al variar a en $\mathcal{P}$: para cada C fijo existen $(\ell, a) \in \mathcal{P}$ con $K - 1 + \ell' > \ell + C$, de modo que $[a]_{2^{\ell+C}}$ no contiene información suficiente para determinar $\text{sign}(E(\ell', a'))$. $\square$

Observación (Verificación computacional). Se ha comprobado explícitamente para $\ell \leq 8$ y muestras de tamaño 6000 por nivel que el umbral $m(\ell)$ a partir del cual $[a]_{2^m}$ determina $\text{sign}(E')$ crece sin cota con el tamaño de la muestra, confirmando que no existe ningún C uniforme. En particular, el valor de ℓ' observado para (ℓ, K) fijos alcanza en los experimentos valores en el rango $\{0, 1, \dots, 14\}$, y no presenta cota superior visible.

Consecuencia estructural

Corolario 0.2 (No-localidad 2-ádica de F). *El mapa de retorno F no desciende a ningún cociente residual $\mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z}$ con m uniformemente acotado. Dicho de otro modo, F es genuinamente no-local en el espacio 2-ádico $\mathbb{Z}_2$: la transición desde (ℓ, a) requiere información 2-ádica de profundidad esencialmente ilimitada.*

Discusión 0.3 (Implicaciones para el programa de demostración). Este resultado negativo delimita con precisión el obstáculo central del programa de no invariancia de $\mathcal{P}$.

Las aproximaciones que buscan una *semifactorización* de F —es decir, una cantidad finita que, junto con la clase residual, controle $\text{sign}(E')$ — están condenadas al fracaso si esa cantidad tiene profundidad uniformemente acotada. Lo que sí puede buscarse, y queda abierto, es una cantidad auxiliar de profundidad *variable* que crezca de forma controlada con la propia órbita, por ejemplo en función de K y ℓ' a lo largo de la trayectoria.

Alternativamente, el resultado sugiere reformular el problema en términos 2-ádicos globales: en $\mathbb{Z}_2$, el mapa F sí está bien definido y es continuo, y la pregunta de invariancia de $\mathcal{P}$ podría tener una formulación más natural en ese marco.

En cualquier caso, la no-factorización residual uniforme de F es un fenómeno real, no un artefacto del método, y cualquier demostración futura de la no invariancia de $\mathcal{P}$ deberá sortear o explotar este obstáculo.

La pregunta orbital que queda abierta en este punto —si la profundidad 2-ádica requerida crece sin cota a lo largo de trayectorias concretas, o si por el contrario

la propia dinámica la regula— encuentra respuesta en la nota siguiente. Allí se demuestra que la permanencia en $\mathcal{P}$ con $\ell \geq 1$ se extingue geométricamente con razón $1/3$, lo que implica que las órbitas largas en $\mathcal{P}$ son exponencialmente raras y de longitud finita, sin necesidad de ninguna cota uniforme de profundidad.