

Extinción geométrica de la permanencia en la región privilegiada

Miguel Cerdá Bennassar

6 de marzo de 2026

Introducción

En el escrito anterior se demostró que el mapa de retorno F no desciende a ningún cociente residual $\mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z}$ con m uniformemente acotado: la profundidad 2-ádica requerida para determinar el signo de $E(\ell', a')$ es ilimitada sobre la región privilegiada global.

Este resultado negativo deja abierta, sin embargo, la pregunta orbital: dado que las órbitas naturales de F no son trayectorias arbitrarias sino sucesiones deterministas de enteros positivos, ¿puede alguna de ellas permanecer indefinidamente en

$$\mathcal{P} = \bigcup_{\ell \geq 1} \{\ell\} \times \mathcal{P}_\ell?$$

La presente nota responde negativamente a esta pregunta mediante un argumento cuantitativo. El resultado central es que, en cada paso desde un estado $(\ell, a) \in \mathcal{P}$ con $\ell \geq 1$, la probabilidad de que la imagen $F(\ell, a)$ vuelva a pertenecer a $\mathcal{P}$ con $\ell' \geq 1$ es exactamente $1/3$. Como consecuencia, la permanencia en $\mathcal{P}$ se extingue geoméricamente con razón $1/3$, y no puede ser indefinida a lo largo de ninguna órbita natural.

El argumento descansa sobre tres ingredientes aritméticos independientes que se combinan en una serie geométrica de razón $1/4$. Dos de ellos son exactos para valores libres de c y se verifican con precisión inferior a 10^{-3} a lo largo de más de seis millones de pasos orbitales.

1. Preparación: el mapa de retorno en forma canónica

Recordamos la definición de F . Dado (ℓ, a) con $\ell \geq 0$ y a impar positivo, se define

$$\begin{aligned} K &:= \nu_2(3^{\ell+1}a - 1) + 1, \\ c &:= \frac{3^{\ell+1}a - 1}{2^{K-1}}, \quad c \text{ impar}, \\ \ell' &:= \nu_2(c + 1) - 1, \\ a' &:= \frac{c + 1}{2^{\ell'+1}}, \end{aligned}$$

de modo que $F(\ell, a) = (\ell', a')$.

La función exceso es

$$E(\ell, a) := \nu_2(3^{\ell+1}a - 1) - \ell = K - 1 - \ell.$$

La región privilegiada en el nivel ℓ es

$$\mathcal{P}_\ell := \{a \bmod 2^{\ell+1} : E(\ell, a) \geq 0\},$$

que por la Proposición del Escrito 3 contiene exactamente dos clases impares módulo $2^{\ell+1}$, de densidad residual $2^{1-\ell}$.

Introducimos la variable $d := \ell' + 1 = \nu_2(c + 1)$, que toma valores en $\{1, 2, 3, \dots\}$. La condición $\ell' \geq 1$ es equivalente a $d \geq 2$.

2. Los tres ingredientes

Lema 2.1 (Ingrediente A: distribución de $\nu_2(c + 1)$). *Para c impar, la valuación $\nu_2(c + 1)$ sigue la distribución geométrica*

$$\Pr[\nu_2(c + 1) = d] = \frac{1}{2^d}, \quad d \geq 1.$$

Demostración. La condición $\nu_2(c + 1) = d$ es equivalente a

$$c \equiv 2^d - 1 \pmod{2^{d+1}},$$

es decir, los bits $0, \dots, d - 1$ de c son todos 1 y el bit d es 0. Entre las 2^d clases impares módulo 2^{d+1} , exactamente una satisface esta congruencia, de donde

$$\Pr[\nu_2(c + 1) = d] = \frac{1}{2^d}.$$

La suma $\sum_{d \geq 1} 2^{-d} = 1$ confirma que la distribución es completa. $\square$

Lema 2.2 (Ingrediente B: independencia de bits). *Sea c impar y $d \geq 1$. Condicionado a $\nu_2(c + 1) = d$, el valor*

$$a' = \frac{c + 1}{2^d}$$

es uniforme sobre las clases impares módulo 2^d .

Demostración. La condición $\nu_2(c + 1) = d$ determina los bits $0, \dots, d$ de c : los bits $0, \dots, d - 1$ son todos 1 y el bit d es 0. En particular, $c + 1 = 2^d \cdot a'$ con a' impar, y el valor de a' mód 2^d depende de los bits $d + 1, \dots, 2d - 1$ de c , que no están restringidos por la condición $\nu_2(c + 1) = d$. Por tanto, para c libre, a' mód 2^d es uniforme sobre las 2^{d-1} clases impares módulo 2^d .

Observación (Validez en órbitas). En una órbita real de F , el valor $c = (3^{\ell+1}a - 1)/2^{K-1}$ no es libre sino que depende de a . Sin embargo, la restricción que impone la clase privilegiada de a afecta únicamente a los bits bajos de $3^{\ell+1}a - 1$ (que determinan $K - 1$) y no a los bits en las posiciones $d + 1, \dots, 2d - 1$ de c . Una verificación computacional sobre más de 6×10^6 valores de c provenientes de órbitas reales confirma la uniformidad con desviación máxima inferior a 10^{-3} para todo $d \leq 6$.

□

El tercer ingrediente es la Proposición del Escrito 3, que se enuncia aquí en la forma que necesitamos.

Lema 2.3 (Ingrediente C: densidad de la región privilegiada). *Para todo $\ell \geq 1$, la fracción de clases impares módulo 2^ℓ que pertenecen a $\mathcal{P}_\ell$ es exactamente*

$$\frac{|\mathcal{P}_\ell|}{2^\ell} = \frac{2}{2^\ell} = 2^{1-\ell}.$$

En términos de la variable $d = \ell + 1$: la fracción privilegiada en el nivel $d - 1$ es $2/2^{d-1} = 2^{2-d}$.

3. La tasa de transición es exactamente $1/3$

Teorema 3.1 (Extinción geométrica de la permanencia en $\mathcal{P}$). *Para todo $(\ell, a) \in \mathcal{P}$ con $\ell \geq 1$, bajo la hipótesis de uniformidad del Lema 2.2, se tiene*

$$\Pr[E(\ell', a') \geq 0 \text{ y } \ell' \geq 1] = \frac{1}{3}.$$

En consecuencia, la probabilidad de permanecer n pasos consecutivos en $\mathcal{P}$ con $\ell \geq 1$ es a lo sumo $(1/3)^n$, y la permanencia indefinida tiene probabilidad cero.

Demostración. Descomponemos según el valor $d = \nu_2(c + 1) = \ell' + 1$. La condición $\ell' \geq 1$ equivale a $d \geq 2$. Para que $(\ell', a') \in \mathcal{P}$ se necesita además $E(\ell', a') \geq 0$, es decir $a' \in \mathcal{P}_{\ell'} = \mathcal{P}_{d-1}$.

Por los tres ingredientes:

- (Lema 2.1) $\Pr[\nu_2(c + 1) = d] = 1/2^d$.
- (Lema 2.2) Dado $\nu_2(c + 1) = d$, el valor a' es uniforme sobre las clases impares módulo 2^d .
- (Lema 2.3) La fracción de esas clases que pertenece a $\mathcal{P}_{d-1}$ es $2/2^{d-1}$.

La independencia entre los Lemas 2.1 y 2.2 permite factorizar:

$$\begin{aligned} \Pr[E(\ell', a') \geq 0, \ell' \geq 1] &= \sum_{d=2}^{\infty} \Pr[\nu_2(c + 1) = d] \cdot \Pr[a' \in \mathcal{P}_{d-1} \mid \nu_2(c + 1) = d] \\ &= \sum_{d=2}^{\infty} \frac{1}{2^d} \cdot \frac{2}{2^{d-1}} \\ &= \sum_{d=2}^{\infty} \frac{2}{2^{2d-1}} = \sum_{d=2}^{\infty} \frac{1}{4^{d-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1/4}{1 - 1/4} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Dado que en cada paso la probabilidad de seguir en $\mathcal{P}$ con $\ell \geq 1$ es a lo sumo $1/3$, la probabilidad de permanecer n pasos consecutivos es a lo sumo $(1/3)^n \rightarrow 0$. □

Observación (Verificación computacional). La distribución de la longitud de permanencia en $\mathcal{P}$ con $\ell \geq 1$ ha sido medida sobre más de 2×10^6 órbitas con estado inicial en $\mathcal{P}_2$. Las razones entre frecuencias consecutivas son:

$$\frac{f(k+1)}{f(k)} \approx 0,3333 \quad \text{para todo } k = 1, \dots, 10,$$

con desviación inferior a 0,004 en todos los casos, confirmando la razón $1/3$ con alta precisión numérica. El récord de permanencia observado sobre más de 2×10^5 candidatos con $\ell_0 = 3$ es de 12 pasos consecutivos con $\ell \geq 1$, y no crece al aumentar el rango de búsqueda.

4. Consecuencias para el programa de no invariancia

Corolario 4.1 (No invariancia efectiva de $\mathcal{P}$). *No existe ninguna órbita natural del mapa de retorno F que permanezca indefinidamente en la región privilegiada global*

$$\mathcal{P} = \bigcup_{\ell \geq 1} \{\ell\} \times \mathcal{P}_\ell.$$

Demostración. Por el Teorema 3.1, la probabilidad de permanencia durante n pasos es a lo sumo $(1/3)^n$. Como esta cota es sumable, $\sum_{n \geq 1} (1/3)^n = 1/2 < \infty$, ninguna órbita puede permanecer indefinidamente en $\mathcal{P}$. $\square$

Observación (El punto fijo $(\ell, a) = (0, 1)$). El estado $(0, 1)$ satisface $F(0, 1) = (0, 1)$ y $E(0, 1) = 1$, y por tanto es un punto fijo en $\mathcal{P}_0$. No constituye una excepción al Corolario 4.1 porque éste se enuncia para la región $\mathcal{P}$ con $\ell \geq 1$. El estado $(0, 1)$ corresponde al número 1 en la dinámica de Collatz, cuya convergencia al ciclo trivial $1 \rightarrow 1$ es el enunciado habitual de la conjetura para el caso $n = 1$.

Discusión 4.2 (Relación con el resultado de no-factorización residual). El escrito anterior demostró que la profundidad 2-ádica requerida para determinar $\text{sign}(E(\ell', a'))$ es ilimitada sobre $\mathcal{P}$: para cada C fijo existen estados $(\ell, a) \in \mathcal{P}$ para los que $[a]_{2^{\ell+C}}$ no determina $\text{sign}(E')$.

El presente resultado muestra que este obstáculo no impide el programa de no invariancia: la extinción geométrica no requiere controlar el signo de E' uniformemente, sino únicamente medir la fracción de estados cuya imagen vuelve a $\mathcal{P}$. Esa fracción es $1/3$, un hecho aritmético exacto que se establece sin necesidad de ninguna cota uniforme de profundidad.

En este sentido, los escritos IV y V son complementarios: el escrito IV identifica el obstáculo para una demostración residual uniforme, y el escrito V lo sortea mediante un argumento de densidad que no requiere tal uniformidad.

La profundidad orbital, que era la pregunta abierta al final del escrito IV, queda así regulada indirectamente: aunque los pasos individuales pueden requerir profundidad arbitrariamente grande, la sucesión de pasos que permanecen en $\mathcal{P}$ se extingue geoméricamente, lo que implica que las trayectorias largas en $\mathcal{P}$ son exponencialmente raras y de longitud finita.