

Invariancia de la distribución uniforme bajo F y extinción geométrica $(1/3)^n$ en densidad

Miguel Cerdá Bennassar

6 de marzo de 2026

Introducción

El Escrito 6 estableció que la fracción de elementos de cada clase privilegiada cuya imagen bajo F en un paso vuelve a $\mathcal{P}$ con $\ell' \geq 1$ es exactamente $1/3$, cuando se mide sobre un periodo completo de la clase aritmética correspondiente. El resultado se formuló como una igualdad de densidades en un único paso.

La presente nota extiende ese resultado a n pasos consecutivos. El argumento requiere dos ingredientes que no estaban en el Escrito 6: una formulación precisa de la propiedad de uniformidad que se quiere propagar, y un lema de estabilidad que justifique que dicha propiedad se preserva al iterar F . Una vez establecidos, la extinción geométrica $(1/3)^n$ se obtiene por inducción.

El alcance del resultado es el mismo que en el Escrito 6: es una afirmación sobre a_0 elegido uniformemente dentro de un periodo completo de la progresión aritmética que representa $\mathcal{P}_{\ell_0}$, no sobre órbitas individuales deterministas.

1. La propiedad de uniformidad y su estabilidad

Definición 1.1 (Propiedad Q_n). Decimos que la propiedad Q_n se cumple si: para cada $j \geq 1$, condicionado a que la órbita ha permanecido n pasos consecutivos en $\mathcal{P}$ y a que $\ell_n = j$, la distribución de a_n mód 2^{j+1} sobre $\mathcal{P}_j$ es exactamente uniforme (equiprobabilidad entre las dos clases de $\mathcal{P}_j$).

Observación. La propiedad Q_n es una condición sobre la distribución *condicional* dado el nivel de destino j . No exige que j sea fijo a priori: para cada valor posible de ℓ_n , la distribución de a_n sobre $\mathcal{P}_{\ell_n}$ debe ser uniforme.

Lema 1.2 (Preservación del 50/50). Sea $(\ell, a) \in \mathcal{P}$ con $\ell \geq 1$, y sea $(\ell', a') = F(\ell, a)$ con $(\ell', a') \in \mathcal{P}$, $\ell' \geq 1$. Si la distribución de a mód $2^{\ell+1}$ sobre $\mathcal{P}_\ell$ es exactamente uniforme, entonces la distribución de a' mód $2^{\ell'+1}$ sobre $\mathcal{P}_{\ell'}$ es exactamente uniforme.

Demostración. Por el Teorema 4.1 del Escrito 6, condicionado a $\nu_2(c+1) = d$ (donde $c = \text{odd_part}(3^{\ell+1}a-1)$ y $d = \ell'+1$), el valor $a' = (c+1)/2^d$ es exactamente uniforme sobre las 2^{d-1} clases impares módulo $2^d = 2^{\ell'+1}$.

La condición $a' \in \mathcal{P}_{\ell'}$ restringe a' mód $2^{\ell'+1}$ a un subconjunto de exactamente 2 de esos $2^{\ell'}$ residuos impares. Como todos son equiprobables, la distribución condicional dado $a' \in \mathcal{P}_{\ell'}$ asigna probabilidad $1/2$ a cada uno. La distribución sobre $\mathcal{P}_{\ell'}$ es exactamente uniforme, independientemente de qué valor concreto tenga ℓ' .

Notamos que este argumento sólo usa la uniformidad de a' mód $2^{\ell'+1}$, que el Teorema 4.1 del Escrito 6 proporciona vía la equidistribución de c mód 2^{2d} . La uniformidad inicial de a sobre $\mathcal{P}_{\ell}$ asegura que los valores de k que indexan la clase se distribuyen uniformemente, lo que es exactamente la hipótesis del Teorema 4.1 del Escrito 6. $\square$

Lema 1.3 (Estabilidad de Q_n). *Si Q_n se cumple, entonces Q_{n+1} también.*

Demostración. Fijamos un nivel de destino $j' \geq 1$ y queremos mostrar que, condicionado a que la órbita permanece $n+1$ pasos en $\mathcal{P}$ y a que $\ell_{n+1} = j'$, la distribución de a_{n+1} mód $2^{j'+1}$ sobre $\mathcal{P}_{j'}$ es uniforme.

La distribución conjunta de (ℓ_{n+1}, a_{n+1}) proviene de aplicar F a (ℓ_n, a_n) . Condicionamos sobre el valor $\ell_n = j$ (que puede ser cualquier $j \geq 1$) y descomponemos:

$$\Pr[a_{n+1} \in C \mid \ell_{n+1} = j', \ell_n = j, Q_n]$$

para $C \in \{\text{clase regenerativa de } \mathcal{P}_{j'}, \text{clase umbral de } \mathcal{P}_{j'}\}$.

Por Q_n : condicionado a $\ell_n = j$, la distribución de a_n sobre $\mathcal{P}_j$ es uniforme. Por el Lema 1.2 aplicado con $\ell = j$ y $\ell' = j'$: la imagen bajo F de esa distribución uniforme, condicionada a aterrizar en $\mathcal{P}_{j'}$, es uniforme sobre $\mathcal{P}_{j'}$.

Como este resultado vale para cada valor de j por separado, y una mezcla (sobre j) de distribuciones uniformes sobre $\mathcal{P}_{j'}$ es de nuevo la distribución uniforme sobre $\mathcal{P}_{j'}$, se concluye que la distribución de a_{n+1} sobre $\mathcal{P}_{j'}$ —condicionada a $\ell_{n+1} = j'$ y a $n+1$ pasos en $\mathcal{P}$ — es exactamente uniforme. Esto establece Q_{n+1} . $\square$

2. Extinción geométrica $(1/3)^n$

Teorema 2.1 (Extinción geométrica en densidad). *Sea a_0 elegido uniformemente en un periodo completo de las progresiones aritméticas*

$$a_{\ell_0}^* + k \cdot 2^{\ell_0+1}, \quad a_{\ell_0}^\dagger + k \cdot 2^{\ell_0+1}.$$

Para todo $n \geq 1$, la fracción de tales a_0 para la que la órbita $(\ell_0, a_0), F(\ell_0, a_0), \dots, F^n(\ell_0, a_0)$ permanece en $\mathcal{P}$ con $\ell \geq 1$ durante n pasos consecutivos es exactamente $(1/3)^n$.

Demostración. Definimos p_n como esa fracción y demostramos $p_n = (1/3)^n$ por inducción, verificando simultáneamente la propiedad Q_n .

Base ($n = 0$). $p_0 = 1$ (todos los $a_0 \in \mathcal{P}_{\ell_0}$ satisfacen la condición vacía). La propiedad Q_0 se cumple por hipótesis: a_0 es uniforme sobre $\mathcal{P}_{\ell_0}$.

Paso inductivo. Supongamos que $p_n = (1/3)^n$ y que Q_n se cumple.

Para calcular p_{n+1} necesitamos la probabilidad de que, partiendo de $(\ell_n, a_n) \in \mathcal{P}$, el siguiente paso permanezca en $\mathcal{P}$ con $\ell' \geq 1$.

Por Q_n : para cada $j \geq 1$, condicionado a $\ell_n = j$, la distribución de a_n sobre $\mathcal{P}_j$ es uniforme. Por el Corolario 5.1 del Escrito 6 aplicado al nivel j : la fracción de

elementos de $\mathcal{P}_j$ (uniformemente distribuidos) cuya imagen bajo F está en $\mathcal{P}$ con $\ell' \geq 1$ es exactamente $1/3$, para todo $j \geq 1$.

Por tanto, independientemente de la distribución de ℓ_n sobre los posibles niveles j , la tasa de retorno condicional dado $\ell_n = j$ es siempre $1/3$. La tasa global en el paso $n + 1$ es también $1/3$, y $p_{n+1} = p_n \cdot (1/3) = (1/3)^{n+1}$.

La propiedad Q_{n+1} se cumple por el Lema 1.3. $\square$

3. Resumen del programa: estado final

Los Escritos 3–7 proporcionan ahora una demostración completa de la extinción geométrica en sentido distribucional:

- (III) Exactamente dos clases residuales módulo $2^{\ell+1}$ tienen exceso no negativo, con densidad $2^{1-\ell}$.
- (IV) F requiere profundidad 2-ádica ilimitada: ninguna aproximación residual uniforme puede determinar $\text{sign}(E')$.
- (V) La fracción de retorno a $\mathcal{P}$ en un paso es $\sum_{d \geq 2} (1/2^d) \cdot (2/2^{d-1}) = 1/3$ (bajo el Ingrediente B como hipótesis).
- (VI) El Ingrediente B es exacto para c real en ambas clases de $\mathcal{P}_\ell$: la fracción de elementos cuya imagen en un paso pertenece a $\mathcal{P}$ con $\ell' \geq 1$ es exactamente $1/3$, como igualdad de densidades.
- (VII) La distribución uniforme sobre $\mathcal{P}_j$ es estable en cada retorno a $\mathcal{P}$, para cada nivel j de destino (Lemas 1.2 y 1.3). Por inducción, la fracción de estados iniciales en $\mathcal{P}_{\ell_0}$ que permanece n pasos consecutivos en $\mathcal{P}$ es exactamente $(1/3)^n \rightarrow 0$.

Discusión 3.1 (Gap restante). El único gap que permanece es el paso de la extinción distribucional a la extinción orbital: garantizar que ninguna órbita determinista individual de F habita $\mathcal{P}$ indefinidamente.

El resultado $(1/3)^n \rightarrow 0$ implica que el conjunto de estados iniciales que permanecen n pasos en $\mathcal{P}$ tiene densidad exactamente $(1/3)^n$ dentro de $\mathcal{P}_{\ell_0}$. La intersección sobre todos los n tiene densidad cero en el sentido de estas familias aritméticas. Sin embargo, un conjunto de densidad cero puede contener órbitas individuales deterministas, y excluir esa posibilidad requiere un argumento de naturaleza distinta: una función de Lyapunov que decrezca a lo largo de las órbitas en $\mathcal{P}$, o un argumento de incompatibilidad residual explícita a lo largo de las trayectorias. Este es el problema central que queda abierto.