Escrito CXXXI

Regímenes degenerados de la identidad de síntesis: clasificación de los pares $(A(p), B(p))$

Miguel Cerdá Bennassar

Junio de 2026

Resumen

La identidad de síntesis $\kappa(p) \equiv A(p) - B(p) \pmod{g}$ admite tres regímenes cualitativamente distintos según el par $(A(p), B(p))$. El *régimen de proyección pura* ($B(p) = 0$, $\kappa \equiv A$) ocurre cuando $g \mid \alpha_p$ y la corrección desaparece: $\kappa(p)$ queda enteramente determinado por el símbolo $(3/p)_g$. El *régimen de interferencia* ($A \neq B$, $B \neq 0$) es el caso genérico donde ambos ingredientes contribuyen con cancelación parcial. El *régimen de resonancia exacta* ($A = B \neq 0$, $\kappa = 0$) produce cancelación exacta: cuatro de los diecinueve primos estudiados caen en este régimen, incluyendo el caso notable $A = B = g - 1$ para $m = 11$, $p = 14\,939$. Se dan condiciones algebraicas para cada régimen y se discute la conexión del régimen crítico con el problema del gap local del Capítulo 38.

1. Los tres regímenes

Definición 1.1 (Regímenes de la identidad de síntesis)**.** *Para un primo primitivo p de la torre, la identidad $\kappa(p) \equiv A(p) - B(p) \pmod{g}$ define tres regímenes según el tipo de corrección de $B(p)$ sobre $A(p)$:*

(I) Régimen de proyección pura: $B(p) = 0$. *No hay corrección:* $\kappa(p) \equiv A(p) \pmod{g}$. *El símbolo κ queda enteramente determinado por el símbolo intrínseco $(3/p)_g$.*

(II) Régimen de interferencia: $B(p) \neq 0$ *y* $A(p) \neq B(p)$. *La corrección existe pero no cancela completamente:* $\kappa(p) \not\equiv 0 \pmod{g}$ *y* $\kappa(p) \not\equiv A(p) \pmod{g}$.

(III) Régimen de resonancia exacta: $A(p) = B(p) \neq 0$. *La corrección es perfecta:* $\kappa(p) \equiv 0 \pmod{g}$.

Los tres regímenes son exhaustivos y mutuamente excluyentes.

2. Condiciones algebraicas de cada régimen

Proposición 2.1 (Condición algebraica del Régimen I)**.** $B(p) = 0$ *si y solo si* $(\alpha_p \bmod g)\cdot(h_p \bmod g) \equiv 0 \pmod{g}$. *Una condición suficiente es $g \mid \alpha_p$ (demostrada en el Escrito CXXVIII).*

Proposición 2.2 (Condición algebraica del régimen de resonancia exacta). *$A(p) = B(p)$ si y solo si:*

$$\iota_p^{\text{torre}}\left(\left(\frac{3}{p}\right)_g\right) \equiv (\alpha_p \text{ mód } g) \cdot (h_p \text{ mód } g) \pmod{g}.$$

Equivalentemente, el símbolo coordinado de 3 coincide exactamente con la corrección aritmética de la torre.

Observación 2.3. *No existe actualmente ninguna condición algebraica simple de p que caracterice el régimen de resonancia exacta. La condición de la Proposición 2.2 es tautológica: dice que $A = B$ cuando $A = B$. Encontrar una condición independiente en términos de p, $d(p)$ o α_p es un problema abierto.*

3. Distribución observada

m	p	g	A	B	κ	Régimen
2	499	2	1	0	1	I (proy.)
3	186 793	3	0	0	0	I (proy.)
4	5	4	3	0	3	I (proy.)
4	24 917	4	1	3	2	II (interf.)
5	11	5	3	0	3	I (proy.)
5	191	5	3	1	2	II (interf.)
5	36 791	5	3	3	0	III (reson.)
6	19	6	1	1	0	III (reson.)
6	67	6	3	0	3	I (proy.)
7	778 247	7	4	0	4	I (proy.)
8	769	8	0	0	0	I (proy.)
9	3 673	9	4	7	6	II (interf.)
10	9 931	10	1	2	9	II (interf.)
11	23	11	5	0	5	I (proy.)
11	14 939	11	10	10	0	III (reson.)
15	2 866 441	15	0	0	0	I (proy.)
16	97	16	6	2	4	II (interf.)
18	37	18	8	0	8	I (proy.)
20	7 807 441	20	4	4	0	III (reson.)

Régimen	Casos	Frecuencia
I — Proyección pura	10	53 %
II — Interferencia	5	26 %
III — Resonancia exacta	4	21 %

4. El régimen de resonancia exacta

Los cuatro casos de este régimen son $(A, B) \in \{(3,3), (1,1), (10,10), (4,4)\}$, con $\kappa = 0$ en todos.

Observación 4.1 (El caso $A = B = g - 1$). *Para $m = 11$, $p = 14\,939$: $g = 11$ y $A = B = 10 = g - 1$. Este es el caso de máxima cancelación: ambos ingredientes alcanzan el valor máximo del grupo $\mathbb{Z}/g\mathbb{Z}$ y se cancelan exactamente.*

Observación 4.2 (Conexión con el Capítulo 38). *En el Capítulo 38 el «gap local» corresponde a $k(p) = g - 1$ (el primo elige el punto malo de la subvariedad $L_1 \cap L_2$). La relación $\kappa(p) = k(p) \cdot qh \bmod g$ (Escrito CXXIII) muestra que $\kappa = 0$ no implica $k = 0$ en general. Sin embargo, los casos del régimen de resonancia exacta con $\kappa = 0$ son candidatos a comportamiento especial respecto al gap local. La conexión exacta entre el régimen de resonancia exacta y el gap local permanece como cuestión abierta.*

5. Preguntas abiertas

Problema abierto 5.1 (Caracterización del régimen de resonancia exacta). *¿Existe una condición aritmética de p (independiente de A y B) que prediga el régimen de resonancia exacta? ¿Es la frecuencia 21 % estable cuando se amplía la muestra?*

Problema abierto 5.2 (Régimen y distribución de κ). *En el Régimen I, $\kappa \equiv A$: su distribución depende de la teoría de reciprocidad de $(3/p)_g$. En el régimen de resonancia exacta, $\kappa = 0$: contribuye un exceso de ceros. ¿Cómo afectan los tres regímenes a la distribución global de $\kappa(p)$ y por tanto a la distribución de $k(p)$?*