Escrito CXXXVII

Teorema de descomposición del sistema de síntesis:
$\mathcal{S}(p) = \mathcal{M}(p) \times \mathcal{D}(p)$

Miguel Cerdá Bennassar

Junio de 2026

Resumen

Formulamos y demostramos el teorema de descomposición del sistema de síntesis construido en los Escritos CXXII–CXXXVI. El sistema se descompone en dos componentes: la componente modular $\mathcal{M}(p) = \delta(p)$, determinada por p mód g^2 e independiente de $d(p)$, y la componente dinámica $\mathcal{D}(p)$, el índice residual de $k(p)$ dentro de su fibra, gobernado por $d(p)$. La descomposición es estructural: $\mathcal{M}$ y $\mathcal{D}$ son informativamente independientes y juntos reconstruyen el observable $\kappa(p)$. La factorización distribucional $S = \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ en sentido probabilístico es una conjetura condicionada a la conjetura de Artin, que se formula explícitamente.

1. Los dos componentes del sistema

Definición 1.1 (Las dos componentes). *Sea p primo primitivo con $g = \gcd(m, d(p))$:*

1. *La* componente modular*:*

$$\mathcal{M}(p) := \delta(p) = \gcd\left(\frac{p-1}{g}, g\right) \in \{d \in \mathbb{Z} : d \mid g\}.$$

2. *La* componente dinámica *es el índice residual de $k(p)$ dentro de su fibra (con $k(p) \in \{0, \ldots, g-1\}$):*

$$\mathcal{D}(p) := k(p) \text{ mód } \frac{g}{\delta(p)} \;\in\; \mathbb{Z}/(g/\delta(p))\mathbb{Z}.$$

Observación 1.2. *$\mathcal{D}(p)$ tiene $g/\delta(p)$ valores posibles. Cuando $\delta(p) = 1$: $\mathcal{D}(p) = k(p) \text{ mód } g = k(p)$, ya que $k(p) \in \{0, \ldots, g-1\}$ (la componente dinámica determina k completamente). Cuando $\delta(p) = g$: $\mathcal{D}(p) = k(p) \text{ mód } 1 = 0$ (la componente dinámica colapsa; k es totalmente libre dentro de $\{0, \ldots, g-1\}$).*

2. El teorema de descomposición

Teorema 2.1 (Descomposición estructural del sistema). *El par $(\mathcal{M}(p), \mathcal{D}(p))$ tiene las siguientes propiedades:*

(i) Independencia informacional: $\mathcal{M}(p) = \delta(p)$ *es función de* p mód g^2 *e independiente de* $d(p)$. $\mathcal{D}(p)$ *depende de* $k(p)$ *y por tanto de* $d(p)$. *Ninguno de los dos determina al otro.*

(ii) Reconstrucción del observable: *dado el par* $(\mathcal{M}(p), \mathcal{D}(p))$ *y conocido* $(p-1)/g$, *el observable* $\kappa(p)$ *se recupera:*

$$\kappa(p) \equiv k(p) \cdot \frac{p-1}{g} \pmod{g}.$$

(iii) Restricción de κ: $\mathcal{M}(p) \mid \kappa(p)$, *luego* $\kappa(p) \in \mathcal{M}(p) \cdot (\mathbb{Z}/g\mathbb{Z})$. *El observable* κ *no puede ser uniforme en* $\mathbb{Z}/g\mathbb{Z}$ *cuando* $\mathcal{M}(p) > 1$.

Demostración. (i) demostrado en el Escrito CXXXV (independencia $\delta \perp d(p)$) y Escrito CXXXVI (Teorema 3.1). *(ii)* se sigue de $\kappa = k \cdot (p-1)/g$ mód g (Escrito CXXIII): como κ depende solo de la clase de k módulo g/δ, que es exactamente la información contenida en $\mathcal{D}(p)$, se recupera κ (no necesariamente k completo). *(iii)* es la Proposición 2.1 del Escrito CXXXVI. □

3. La factorización distribucional: resultado y conjetura

La descomposición estructural del Teorema 2.1 es un resultado demostrado. La versión distribucional — que el sistema (M, D) se comporte como un producto de distribuciones independientes — es una conjetura:

Proposición 3.1 (Distribución de $\mathcal{M}(p)$ por Dirichlet)**.** *Por el teorema de Dirichlet sobre primos en progresiones aritméticas, la fracción de primos con* $\mathcal{M}(p) = d$ *es:*

$$\Pr(\mathcal{M}(p) = d) = \frac{\phi(g/d)}{g} \quad \textit{para cada } d \mid g,$$

donde la suma $\sum_{d|g} \phi(g/d)/g = 1$ *por la identidad* $\sum_{d|g} \phi(d) = g$. *Este resultado es incondicional.*

Conjetura 3.2 (Factorización distribucional, condicionada a Artin)**.** *Bajo la conjetura de Artin sobre la distribución de* $d(p)$*:*

1. *La distribución de* $\mathcal{D}(p)$ *es uniforme en* $\mathbb{Z}/(g/d)\mathbb{Z}$, *condicionalmente a* $\mathcal{M}(p) = d$.
2. *Las distribuciones de* $\mathcal{M}(p)$ *y* $\mathcal{D}(p)$ *son estadísticamente independientes.*

Bajo esta conjetura y la Proposición 3.1, $k(p)$ *es uniforme en* $\mathbb{Z}/g\mathbb{Z}$, *en concordancia con la hipótesis fuerte del Escrito CXXI.*

Observación 3.3 (La parte conjetural)**.** *La parte (1) requiere que* $k(p)$ *sea uniforme dentro de cada fibra, lo que conecta con* $d(p)$ *y la conjetura de Artin. La parte (2) es independencia distribucional, más fuerte que la independencia informacional demostrada en el Escrito CXXXVI.*

4. El diagrama del sistema

El sistema completo se puede representar como:

Objeto	Fuente	Naturaleza
$\delta(p) = \mathcal{M}(p)$	p mód g^2	modular, Dirichlet
$\kappa(p)$	$A(p) - B(p)$, $\delta \mid \kappa$	observable intermedio
$k(p)$	$d(p)$, dentro de fibra	dinámico, Artin
$(A(p), B(p))$	derivados de k, α, h	proyecciones intermedias

Observación 4.1 (Estado del programa tras el CXXXVII)**.** *Los Escritos CXXII–CXXXVII han establecido:*

1. *La identidad de síntesis* $\kappa \equiv A - B \pmod{g}$ *(CXXVII).*
2. *La clasificación en tres regímenes por* (A, B)*, luego por* (δ, κ) *(CXXXI–CXXXIII).*
3. *La fibra de* k *dado* κ*, de tamaño* δ *(CXXXIV).*
4. $\delta(p) = \gcd((p-1)/g, g)$ *independiente de* $d(p)$ *(CXXXV).*
5. *La reducción* $(A, B, k) \to (\delta, k)$ *y* $\delta \mid \kappa$ *(CXXXVI).*
6. *La descomposición estructural* $\mathcal{S} = \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ *(CXXXVII).*

La factorización distribucional en sentido probabilístico queda como conjetura condicionada a Artin, en concordancia con la hipótesis fuerte del Escrito CXXI.