

Escrito CXXXVIII

Síntesis y cierre del Capítulo 39

Miguel Cerdá Bennassar

Junio de 2026

Resumen

Síntesis de los Escritos CXXII–CXXXVII. Se presentan los resultados en su estructura lógica definitiva, distinguiendo los demostrados incondicionalmente, los condicionados a la conjetura de Artin, y los problemas abiertos.

1. Mapa del capítulo

El Capítulo 39 estudia la distribución de $k(p)$ a través de la identidad $\kappa \equiv A - B$ (mód g) y su factorización estructural.

Escrito	Resultado central
CXXII	Tres dificultades en K_p/\mathbb{Q} : grupo de Galois no cíclico; Frobenius $\neq k$; sin trivialización global.
CXXIII	Tres objetos separados: $(r_p/p)_g$, ι_p^{torre} , $k(p)$. Fórmula $\kappa = k \cdot qh$ mód g .
CXXIV	Morfismo Φ_p : recuperabilidad de k iff $\gcd(qh, g) = 1$.
CXXV	Proto-cociclo $\delta = \kappa - k$: no es coborde trivial.
CXXVI	Identidad $\iota_p((2/p)_g) = h$ mód g . Descomposición $\kappa = A + \Delta$.
CXXVII	Identidad de síntesis $\kappa \equiv A(p) - B(p)$ (mód g).
CXXVIII	Aritmética de B : condición suficiente $g \mid \alpha_p \Rightarrow B = 0$.
CXXIX	Aritmética de A : A depende de p mód 12 para $g = 2$.
CXXX	$A(p) \neq f(p \text{ mód } N)$ para $N \mid 348\,000$, $g = 5$.
CXXXI	Tres regímenes: proyección pura, interferencia, resonancia exacta.
CXXXII	$B(p)$ como operador de régimen: posición de B respecto a A .
CXXXIII	Equivalencia $A = B \Leftrightarrow \kappa = 0 \Leftrightarrow g \mid k \cdot qh$. La incógnita central: $k(p)$.
CXXXIV	Fibra de k dado κ : exactamente $\delta = \gcd(qh, g)$ elementos.
CXXXV	$\delta(p) = \gcd((p-1)/g, g)$: función de p mód g^2 , independiente de $d(p)$.
CXXXVI	Reducción $(A, B, k) \rightarrow (\delta, k)$; restricción $\delta \mid \kappa$.
CXXXVII	Descomposición estructural $\mathcal{S} = \mathcal{M} \times \mathcal{D}$; conjetura distribucional.

2. Resultados demostrados incondicionalmente

1. *Identidad de síntesis* (CXXVII): $\kappa(p) \equiv A(p) - B(p) \pmod{g}$, verificada para diecinueve primos primitivos con $m = 2, \dots, 20$.
2. *Fórmula del parámetro estructural* (CXXXV): $\delta(p) = \gcd\left(\frac{p-1}{g}, g\right)$, función de $p \pmod{g^2}$, independiente de $d(p) = \text{ord}(2, p)$.
3. *Restricción del observable* (CXXXVI): $\delta(p) \mid \kappa(p)$ para todo primo primitivo. El observable κ toma valores en $\delta \cdot (\mathbb{Z}/g\mathbb{Z})$, no en todo $\mathbb{Z}/g\mathbb{Z}$.
4. *Estructura de la fibra* (CXXXIV): dado $\kappa(p)$, el índice $k(p)$ puede tomar exactamente $\delta(p)$ valores en $\mathbb{Z}/g\mathbb{Z}$.
5. *Independencia informacional* (CXXXV–CXXXVI): $\delta(p)$ y $d(p)$ no se determinan mutuamente.
6. *Reciprocidad para $g = 2$* (CXXIX): $A(p)$ depende solo de $p \pmod{12}$.
7. *Ausencia de reciprocidad para $g = 5$* (CXXX): $A(p)$ no es función de $p \pmod{N}$ para ningún $N \mid 348\,000$.
8. *Caracterización de la resonancia exacta* (CXXXIII):

$$A(p) = B(p) \Leftrightarrow \kappa(p) = 0 \Leftrightarrow g \mid k(p) \cdot q \cdot h.$$

9. *Colapso total y primos de Wieferich generalizados* (CXXXV): $\delta(p) = g \Leftrightarrow p \equiv 1 \pmod{g^2}$.

3. Resultados condicionados a la conjetura de Artin

Proposición 3.1 (Distribución de $\delta(p)$ por Dirichlet). *Por el teorema de Dirichlet, la fracción de primos primitivos con $\delta(p) = d$ satisface*

$$\Pr(\delta(p) = d) = \frac{\phi(g/d)}{g} \quad \text{para } d \mid g.$$

La suma es 1 por la identidad $\sum_{d \mid g} \phi(d) = g$. Este resultado es incondicional.

Conjetura 3.2 (Factorización distribucional, condicionada a Artin). *Bajo la conjetura de Artin sobre la distribución de $d(p)$:*

1. *La distribución de $k(p)$ dentro de su fibra de tamaño $\delta(p)$ es uniforme.*
2. *Las distribuciones de $\delta(p)$ y de $k(p)$ dentro de la fibra son estadísticamente independientes.*

Bajo esta conjetura y la Proposición 3.1, $k(p)$ es uniforme en $\mathbb{Z}/g\mathbb{Z}$, en concordancia con la hipótesis fuerte del Escrito CXXI.

4. Problemas abiertos del capítulo

Problema abierto 4.1. *La condición suficiente $g \mid \alpha_p \Rightarrow B(p) = 0$ (CXXVIII): ¿es también necesaria, o puede $B(p) = 0$ con $g \nmid \alpha_p$ para g compuesto con divisores de cero en $\mathbb{Z}/g\mathbb{Z}$?*

Problema abierto 4.2. *El experimento decisivo sobre $A(p)$: encontrar dos primos con $d(p) = d(p')$ y $A(p) \neq A(p')$, lo que establecería que A contiene información irreducible más allá de $d(p)$.*

Problema abierto 4.3. *La caracterización aritmética del régimen de resonancia exacta (CXXXIII): ¿existe una condición sobre p y $d(p)$, independiente del cálculo de $k(p)$, que prediga cuándo $A(p) = B(p)$?*

Problema abierto 4.4. *La distribución de $k(p)$ en el estrato de colapso $p \equiv 1 \pmod{g^2}$ (CXXXV): ¿es uniforme en $\{0, \dots, g-1\}$, o hay valores preferidos?*

5. Cierre estructural del Capítulo 39

Los resultados demostrados permiten reducir el estudio del sistema a dos cuestiones complementarias:

1. *La distribución de $\delta(p)$* , gobernada por la distribución de $p \pmod{g^2}$ mediante el teorema de Dirichlet. Esta parte es accesible con herramientas establecidas.
2. *La distribución de $k(p)$ dentro de cada fibra*, que depende de la distribución de $d(p) = \text{ord}(2, p)$ y está relacionada con la conjetura de Artin sobre raíces primitivas. Esta parte requiere herramientas más profundas.

La parte estructural del capítulo queda cerrada. El programa queda formulado con precisión: lo que está demostrado, lo que está condicionado, y lo que permanece abierto.

Un posible **Capítulo 40** podría explorar tres direcciones naturales del programa:

1. *Distribución de $k(p)$ y conjetura de Artin.* Estudiar la posible uniformidad de $k(p)$ dentro de cada fibra para familias más amplias de primos primitivos. En particular, analizar si la conjetura de factorización distribucional puede formularse de manera condicional a resultados parciales de Artin, en la línea de los métodos de Hooley bajo hipótesis de tipo GRH.
2. *Estrato de colapso y fenómenos de tipo Wieferich.* El caso $\delta(p) = g$ (equivalente a $p \equiv 1 \pmod{g^2}$) generaliza el fenómeno de los primos de Wieferich en el caso $g = 2$. Un estudio sistemático podría relacionar este estrato extremo con la dinámica de rigidez observada en el Capítulo 38.
3. *Extensión estructural del formalismo.* La descomposición $\mathcal{S} = \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ y la identidad de síntesis $\kappa \equiv A - B$ aparecen en la torre $2^{8m} - 3^{5m}$. Un programa más general consistiría en investigar si estructuras análogas emergen para otras torres o para pares más generales (a, b) , y qué invariantes sobreviven a dicha generalización.