

Sobre la fragilidad de la sincronización en la dinámica de Collatz

Nota de investigación

Miguel Cerdá Bennassar

8 de enero de 2026

Versión revisada, octubre de 2026

Nota de intención

Este cuaderno no tiene como objetivo presentar una demostración de la conjetura de Collatz ni desarrollar un nuevo método formal de ataque al problema. Su propósito es más limitado y, al mismo tiempo, previo: identificar y delimitar ciertas restricciones estructurales que condicionan la dinámica del sistema y que ayudan a comprender por qué la aparición de ciclos periódicos no triviales resulta extraordinariamente frágil.

El texto adopta deliberadamente un enfoque negativo, en el sentido de que se centra en describir qué mecanismos no pueden sostenerse de forma coherente bajo la iteración, más que en construir trayectorias particulares. Se distingue con cuidado entre los enunciados que se demuestran y los que tienen carácter orientativo; estos últimos deben leerse como herramientas de orientación conceptual, no como afirmaciones concluyentes. El cuaderno está concebido como una base de trabajo: un mapa previo que ordena ideas, fija lenguaje y señala obstáculos estructurales.

1. El problema de la sincronización

La existencia de un ciclo periódico no trivial en la dinámica de Collatz requeriría algo más que descensos locales pronunciados o fluctuaciones ocasionales en la valuación 2-ádica. Exigiría una coordinación global sostenida entre los distintos tramos de la órbita, de modo que el crecimiento inducido por las multiplicaciones por 3 quedara compensado de forma coherente por divisiones sucesivas entre potencias de 2.

Esta coordinación puede describirse, de manera informal, como un problema de sincronización. Cada bloque de la dinámica aporta un cierto balance local, pero para que la órbita se cierre periódicamente sería necesario que dichos balances se ajustaran entre sí a lo largo de toda la trayectoria. No basta con que aparezcan ocasionalmente tramos favorables; el ajuste debe mantenerse sin desviaciones acumulativas.

El objetivo de este cuaderno es precisar en qué sentido esta sincronización global resulta estructuralmente inestable. Se mostrará que cada bloque de la descomposición triangular queda determinado por un número finito de dígitos binarios del impar de entrada, que esos dígitos se consumen en la formación del bloque y que los bloques siguientes dependen de dígitos que el bloque anterior no fija. La consecuencia es doble: toda sucesión finita de bloques es realizable,

mientras que la repetición periódica indefinida de una sucesión de bloques determina un único número 2-ádico, que ha de ser un entero positivo para que el ciclo exista.

Principio 1.1 (Restricción estructural fundamental). *La transformación inducida sobre los impares no transmite de un bloque al siguiente ninguna información que favorezca valuaciones 2-ádicas grandes: los dígitos binarios que fijan un bloque se consumen en su formación, y el bloque siguiente depende de dígitos todavía no leídos. En consecuencia, las rachas de valuaciones grandes no pueden sostenerse mediante ningún mecanismo heredado, y la compensación sostenida del crecimiento inducido por la multiplicación por 3 solo puede proceder de una coincidencia aritmética de alcance global.*

Comentario 1.2. El principio tiene carácter orientativo. Su contenido demostrable es la Proposición 2.3 y el Corolario 2.4. No afirma que no existan rachas largas de valuaciones grandes: por el Corolario 2.4, cualquier sucesión finita de bloques, por larga que sea, la recorre algún entero positivo. Lo que afirma es que tales rachas no se transmiten de un bloque a otro, sino que han de estar inscritas de antemano en los dígitos del impar inicial.

2. La descomposición triangular

Escribimos v_2 para la valuación 2-ádica y $T(x) = (3x + 1)/2$.

Definición 2.1. Sea A un entero impar. Su *altura* es $n = v_2(A + 1) \geq 1$, y escribimos $A = 2^n u - 1$ con u impar. Ponemos

$$B = 3^n u - 1, \quad m = v_2(B) \geq 1, \quad A' = B/2^m.$$

Llamamos a m la *cola 2-ádica* del bloque, al par (n, m) el *bloque* (o triángulo) de A , y a A' el *impar de salida*. Como $3^n u$ es impar, B es par y $m \geq 1$; y A' es impar. La definición tiene sentido igualmente para enteros 2-ádicos impares.

Partiendo de un impar A_1 y poniendo $A_{i+1} = A'_i$, la órbita queda descompuesta en una sucesión de bloques $(n_1, m_1), (n_2, m_2), \dots$

Lema 2.2. *Con la notación de la Definición 2.1, para $0 \leq j \leq n$ se tiene $T^j(A) = 3^j 2^{n-j} u - 1$. En particular, $T^j(A)$ es impar para $0 \leq j < n$ y $T^n(A) = B$. Por tanto, la iteración de Collatz lleva A a A' mediante exactamente n multiplicaciones por 3 y $n + m$ divisiones entre 2.*

Demostración. Para $j = 0$ la fórmula es la definición de u . Si vale para $j < n$, entonces

$$T^{j+1}(A) = \frac{3(3^j 2^{n-j} u - 1) + 1}{2} = 3^{j+1} 2^{n-j-1} u - 1.$$

Para $j < n$ el número $3^j 2^{n-j} u - 1$ es impar, porque $2^{n-j} u$ es par; para $j = n$ se obtiene $3^n u - 1 = B$. Las n aplicaciones de T aportan n multiplicaciones y n divisiones, y el paso de B a A' aporta otras m divisiones. $\square$

En términos de la aplicación acelerada sobre los impares, $x \mapsto (3x + 1)/2^{v_2(3x+1)}$, un bloque de altura n y cola m consta de $n - 1$ pasos de exponente 1 seguidos de un paso de exponente $1 + m \geq 2$.

Proposición 2.3. *Sean $n, m \geq 1$.*

- (a) Los impares A cuyo bloque es (n, m) forman exactamente una clase de residuos módulo 2^{n+m+1} , a saber $A \equiv 2^n u_0 - 1$, donde u_0 es el único residuo módulo 2^{m+1} con $3^n u_0 \equiv 1 + 2^m \pmod{2^{m+1}}$.
- (b) Para cada $j \geq 1$, la correspondencia $A \pmod{2^{n+m+j}} \mapsto A' \pmod{2^j}$ es una biyección entre los residuos de la clase anterior y los residuos impares módulo 2^j .

Demostración. (a) La condición $v_2(A+1) = n$ equivale a $A = 2^n u - 1$ con u impar, y el residuo de A módulo 2^{n+m+1} equivale al de u módulo 2^{m+1} . La condición $v_2(3^n u - 1) = m$ equivale a $3^n u \equiv 1 + 2^m \pmod{2^{m+1}}$. Como 3^n es invertible módulo 2^{m+1} , hay un único residuo u_0 que la cumple, y es impar porque $1 + 2^m$ lo es. Recíprocamente, todo $A \equiv 2^n u_0 - 1 \pmod{2^{n+m+1}}$ es de la forma $2^n u - 1$ con $u \equiv u_0 \pmod{2^{m+1}}$, luego u es impar, $v_2(A+1) = n$ y la cola es m .

(b) El residuo de A módulo 2^{n+m+j} equivale al de u módulo 2^{m+j} , y dentro de la clase de (a) hay 2^{j-1} residuos de u , los que cumplen $u \equiv u_0 \pmod{2^{m+1}}$. La aplicación $u \mapsto 3^n u - 1$ es biyectiva módulo 2^{m+j} y lleva esos residuos a los residuos B módulo 2^{m+j} con $B \equiv 2^m \pmod{2^{m+1}}$, que también son 2^{j-1} . Finalmente, $B \mapsto B/2^m$ lleva estos últimos biyectivamente a los 2^{j-1} residuos impares módulo 2^j . $\square$

Corolario 2.4. Sea $(n_1, m_1), \dots, (n_r, m_r)$ una sucesión finita arbitraria de pares de enteros positivos y sea $S = \sum_{i=1}^r (n_i + m_i)$. Los impares cuyos r primeros bloques son $(n_1, m_1), \dots, (n_r, m_r)$ forman exactamente una clase de residuos módulo 2^{S+1} . En particular, su densidad entre los impares es 2^{-S} .

Demostración. Por inducción sobre r . Para $r = 1$ es la Proposición 2.3(a). Si $r \geq 2$, sea $S' = S - (n_1 + m_1)$. Por hipótesis de inducción, los impares A' cuyos bloques son $(n_2, m_2), \dots, (n_r, m_r)$ forman una clase módulo $2^{S'+1}$. Por la Proposición 2.3(b) con $j = S' + 1$, dentro de la clase del bloque (n_1, m_1) hay exactamente un residuo módulo $2^{n_1+m_1+S'+1} = 2^{S+1}$ cuyo impar de salida está en esa clase. $\square$

El Corolario 2.4 es la traducción a bloques del teorema de Terras [6] y Everett [3], según el cual los vectores de paridad de longitud k se corresponden biyectivamente con los residuos módulo 2^k . Como las demostraciones solo usan aritmética módulo potencias de 2, valen igualmente para enteros 2-ádicos impares.

Observación 2.5 (Consumo de altura en la descomposición triangular). Por la Proposición 2.3, el bloque (n, m) consume exactamente los $n + m + 1$ dígitos binarios inferiores de A , y los dígitos restantes pasan biyectivamente a A' . La altura y la cola del bloque siguiente dependen solo de estos dígitos no consumidos, de modo que las alturas de los triángulos no son heredables ni acumulables. En términos de densidad, el Corolario 2.4 dice que los bloques sucesivos se comportan como pares independientes con ley $P(n, m) = 2^{-(n+m)}$; es decir, altura y cola siguen leyes geométricas independientes de parámetro $1/2$ sobre los enteros positivos.

Lema 2.6 (Determinación local de la cola 2-ádica). Sean $n, k \geq 1$ y sea A un impar de altura n y cola m .

- (a) Si $k \geq n + m + 1$, todo $A_2 \equiv A \pmod{2^k}$ es impar, tiene altura n y cola m .
- (b) Si $k \leq n + m$, el impar $A_2 = A + 2^{n+m}$ cumple $A_2 \equiv A \pmod{2^k}$, tiene altura n y su cola es al menos $m + 1$.

En consecuencia, el residuo de A módulo 2^k , junto con la condición $v_2(A+1) = n$, determina la cola si y solo si $m \leq k - n - 1$. Además, para todo $k \geq 1$ existen impares $A_1 \equiv A_2 \pmod{2^k}$ de la misma altura n y con colas distintas.

Demostración. (a) Es la Proposición 2.3(a), pues el residuo módulo 2^{n+m+1} queda fijado por el residuo módulo 2^k .

(b) Como $n + m \geq k$, se tiene $A_2 \equiv A \pmod{2^k}$. Además $A_2 + 1 = 2^n(u + 2^m)$ con $u + 2^m$ impar, luego la altura de A_2 es n , y

$$3^n(u + 2^m) - 1 = B + 3^n 2^m = 2^m(A' + 3^n),$$

donde $A' + 3^n$ es par por ser suma de dos impares. Por tanto, la cola de A_2 es al menos $m + 1$.

La equivalencia se sigue de (a) y (b). Para la última afirmación, dado k , la Proposición 2.3(a) proporciona impares de altura n y cola $m \geq k - n$ (cualquier $m \geq \max(1, k - n)$ sirve), y basta aplicarles (b). $\square$

Corolario 2.7 (Fragilidad estructural de la sincronización global). *La cola de un bloque está determinada por los $n + m + 1$ dígitos binarios inferiores del impar de entrada y no por menos, y ningún número de dígitos fijado de antemano determina la cola de todos los bloques de una altura dada. Junto con la Proposición 2.3(b), esto implica que ninguna información finita sobre A determina su sucesión de bloques más allá de un número finito de ellos, mientras que, por el Corolario 2.4, toda sucesión finita de bloques es posible.*

Por tanto, la existencia de un ciclo no trivial no puede excluirse mediante consideraciones locales: cualquier patrón finito de alturas y colas, por favorable o desfavorable que sea al crecimiento, aparece en alguna órbita. La obstrucción, si existe, es global y reside en la exigencia de que una sucesión de bloques se repita periódicamente sin fin. Esta exigencia se analiza en la sección siguiente.

3. Cierre periódico y balance exacto

Por la Definición 2.1, el impar de salida es una función afín del de entrada:

$$A' = \varphi_{n,m}(A), \quad \varphi_{n,m}(x) = \frac{3^n(x+1) - 2^n}{2^{n+m}} = \frac{3^n x + (3^n - 2^n)}{2^{n+m}}.$$

Proposición 3.1 (Ecuación de cierre). *Sea $(n_1, m_1), \dots, (n_r, m_r)$ una sucesión de pares de enteros positivos, y pongamos $s_i = n_i + m_i$,*

$$K = \sum_{i=1}^r n_i, \quad L = \sum_{i=1}^r s_i, \quad \Phi = \varphi_{n_r, m_r} \circ \dots \circ \varphi_{n_1, m_1}.$$

Entonces $\Phi(x) = (3^K x + N)/2^L$, con

$$N = \sum_{i=1}^r (3^{n_i} - 2^{n_i}) 3^{n_{i+1} + \dots + n_r} 2^{s_1 + \dots + s_{i-1}} > 0.$$

Demostración. Por inducción sobre r . Para $r = 1$ es la expresión de φ_{n_1, m_1} . Si $\Phi_{r-1}(x) = (3^{K'} x + N')/2^{L'}$ es la composición de los $r - 1$ primeros factores, entonces

$$\varphi_{n_r, m_r}(\Phi_{r-1}(x)) = \frac{3^{n_r}(3^{K'} x + N')/2^{L'} + (3^{n_r} - 2^{n_r})}{2^{s_r}} = \frac{3^K x + 3^{n_r} N' + (3^{n_r} - 2^{n_r}) 2^{L'}}{2^L},$$

que es la fórmula del enunciado. Todos los sumandos son positivos porque $3^{n_i} > 2^{n_i}$. $\square$

Teorema 3.2 (Condición de cierre). *Con la notación de la Proposición 3.1, existe un impar positivo A_1 cuya órbita recorre los bloques $(n_1, m_1), \dots, (n_r, m_r)$ y vuelve a A_1 al cabo de ellos si y solo si el número racional*

$$q = \frac{N}{2^L - 3^K}$$

es un entero positivo. En tal caso $A_1 = q$ y, necesariamente, $2^L > 3^K$.

Demostración. Si existe tal A_1 , entonces $\Phi(A_1) = A_1$, es decir, $A_1(2^L - 3^K) = N$. Como $N > 0$ y $A_1 > 0$, se tiene $2^L > 3^K$ y $A_1 = q$.

Recíprocamente, supongamos que q es un entero positivo. Por el Corolario 2.4, aplicado a enteros 2-ádicos, los impares 2-ádicos cuyos j r primeros bloques son la repetición j veces de $(n_1, m_1), \dots, (n_r, m_r)$ forman una clase módulo 2^{jL+1} . Estas clases son decrecientes en j y su intersección es un único entero 2-ádico x^* , cuya sucesión de bloques es la repetición periódica indefinida de la sucesión dada. Al cabo de r bloques, x^* se transforma en $\Phi(x^*)$, que tiene la misma sucesión infinita de bloques; luego $\Phi(x^*) = x^*$. Como $2^L \neq 3^K$, la aplicación afín Φ tiene un único punto fijo en $\mathbb{Q}_2$, que es q . Por tanto $x^* = q$: el entero positivo q recorre los bloques dados y vuelve a sí mismo. $\square$

La ecuación $A_1(2^L - 3^K) = N$ es la ecuación de cierre de Böhm y Sontacchi [1] y de Steiner [5], escrita en las variables de la descomposición triangular. El ciclo trivial corresponde a la sucesión de un solo bloque $(1, 1)$, con $K = 1$, $L = 2$, $N = 1$ y $q = 1$.

Observación 3.3 (Balance exacto y cierre periódico). El Teorema 3.2 muestra que el cierre periódico no depende únicamente de la compensación global del crecimiento, expresada por $2^L > 3^K$, sino de la divisibilidad $2^L - 3^K \mid N$. El numerador N recoge la contribución aditiva de cada bloque ponderada por su posición en la órbita, de modo que dos sucesiones de bloques con los mismos valores de K y L pueden comportarse de forma distinta respecto del cierre. El balance exacto involucra, por tanto, la historia parcial completa de la órbita y no solo los totales de multiplicaciones y divisiones.

La compensación del crecimiento admite además una forma cuantitativa en términos de los impares de entrada de los bloques.

Proposición 3.4 (Balance logarítmico). *Sea $A_1, \dots, A_r$ un ciclo de impares positivos con bloques $(n_1, m_1), \dots, (n_r, m_r)$, de modo que $A_{i+1} = A'_i$ y $A_{r+1} = A_1$. Entonces, para cada i ,*

$$2^{m_i} A_{i+1} + 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{n_i} (A_i + 1),$$

y

$$0 < L \log 2 - K \log 3 < \sum_{i=1}^r \log \left(1 + \frac{1}{A_i}\right).$$

En particular, si $A_{\min}$ es el menor elemento del ciclo,

$$0 < L - K \log_2 3 < \frac{r}{A_{\min} \log 2}.$$

Demostración. La identidad equivale a $2^{m_i} A_{i+1} = B_i = 3^{n_i} u_i - 1$ con $u_i = (A_i + 1)/2^{n_i}$. Multiplicando las r identidades y dividiendo por $\prod_i (A_{i+1} + 1) = \prod_i (A_i + 1)$ se obtiene

$$\prod_{i=1}^r \frac{2^{m_i} A_{i+1} + 1}{A_{i+1} + 1} = \left(\frac{3}{2}\right)^K.$$

Cada factor es igual a $2^{m_i}(A_{i+1} + 2^{-m_i})/(A_{i+1} + 1)$ y, como $0 < 2^{-m_i} < 1$, está estrictamente comprendido entre $2^{m_i}A_{i+1}/(A_{i+1} + 1)$ y 2^{m_i} . Puesto que $\sum m_i = L - K$, resulta

$$2^{L-K} \prod_{i=1}^r \frac{A_i}{A_i + 1} < \left(\frac{3}{2}\right)^K < 2^{L-K},$$

y tomando logaritmos se obtiene la primera desigualdad. La segunda se sigue de $\log(1 + 1/A_i) < 1/A_i \leq 1/A_{\min}$. $\square$

Comentario 3.5. Como $m_i \geq 1$, se tiene $r \leq \sum m_i = L - K$. La Proposición 3.4 obliga, pues, a que el cociente L/K aproxime $\log_2 3$ tanto mejor cuanto mayor sea el menor elemento del ciclo. Combinada con cotas computacionales para ese mínimo y con el desarrollo en fracción continua de $\log_2 3$, esta clase de desigualdad da cotas inferiores para la longitud de los ciclos no triviales; véanse Eliahou [2] y Simons y de Weger [4].

En el lenguaje de los triángulos, la condición dice que la suma de las colas ha de ser aproximadamente $(\log_2 3 - 1) \approx 0,585$ veces la suma de las alturas. Bajo la ley de la Observación 2.5, altura y cola tienen la misma media, igual a 2, de modo que un ciclo exige una proporción entre colas y alturas que se aparta de la típica. Esta comparación describe la fragilidad del cierre, pero no excluye nada por sí sola, porque una órbita concreta no está obligada a reproducir el comportamiento en densidad.

Nota de cierre

Este cuaderno no establece la inexistencia de ciclos periódicos no triviales en la dinámica de Collatz, ni pretende aproximarse a una demostración completa de la conjetura. Su contribución es de otro orden: precisar ciertas restricciones estructurales que cualquier mecanismo de cierre debería necesariamente satisfacer.

Se ha mostrado que cada bloque de la descomposición triangular consume un número finito y exactamente determinado de dígitos binarios del impar de entrada, que la cola 2-ádica no está fijada por los dígitos que fijan la altura, y que los bloques siguientes dependen de dígitos no consumidos. De ahí se sigue que toda sucesión finita de bloques es realizable, de modo que ninguna consideración local puede excluir un ciclo. La fragilidad del cierre periódico es de naturaleza global: la repetición indefinida de una sucesión de bloques determina un único número 2-ádico, y el ciclo existe si y solo si ese número es un entero positivo, lo que exige la divisibilidad exacta $2^L - 3^K \mid N$ y una aproximación de $\log_2 3$ por L/K tanto más fina cuanto mayores sean los elementos del ciclo.

Desde esta perspectiva, la dificultad del problema de Collatz no reside en la ausencia de estructura, sino en la rigidez con la que dicha estructura limita las posibilidades globales del sistema. El cuaderno debe leerse, por tanto, como un mapa de obstáculos más que como un camino de resolución.

Referencias

- [1] C. Böhm y G. Sontacchi, On the existence of cycles of given length in integer sequences like $x_{n+1} = x_n/2$ if x_n even, and $x_{n+1} = 3x_n + 1$ otherwise, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* **64** (1978), 260–264.

- [2] S. Eliahou, The $3x + 1$ problem: new lower bounds on nontrivial cycle lengths, *Discrete Math.* **118** (1993), 45–56.
- [3] C. J. Everett, Iteration of the number-theoretic function $f(2n) = n$, $f(2n + 1) = 3n + 2$, *Adv. Math.* **25** (1977), 42–45.
- [4] J. Simons y B. de Weger, Theoretical and computational bounds for m -cycles of the $3n + 1$ problem, *Acta Arith.* **117** (2005), 51–70.
- [5] R. P. Steiner, A theorem on the Syracuse problem, en *Proceedings of the Seventh Manitoba Conference on Numerical Mathematics and Computing* (1977), 553–559.
- [6] R. Terras, A stopping time problem on the positive integers, *Acta Arith.* **30** (1976), 241–252.