

Tramos impares y pares de Collatz: tablas y triángulos 2-ádicos

Miguel Cerdá Bennassar

2025, revisado en septiembre de 2026

Índice general

Lista de figuras	6
Resumen	7
1. Introducción	8
2. El operador 2-ádico sobre impares	9
2.1. Motivación	9
2.2. Definición del operador reducido	9
2.3. Propiedades básicas	9
2.3.1. Determinismo 2-ádico	9
2.3.2. Invariancia del dominio	10
2.3.3. Compatibilidad con la iteración clásica	10
2.4. El exponente $h(m)$ del puente	10
2.5. Ejemplos ilustrativos	10
2.6. Resumen del capítulo	10
3. Bloques clásicos entre impares consecutivos	11
3.1. Definición formal de puente clásico	11
3.2. Descomposición 2-ádica del puente clásico	11
3.3. Los puentes clásicos como bloques deterministas	11
3.4. Estructura interna del puente clásico	12
3.5. Ejemplos	12
3.6. Interpretación geométrica	12
3.7. Clasificación por firmas 2-ádicas	12
3.8. Puentes clásicos ascendentes y descendentes	12
3.9. Resumen del capítulo	12
4. La Tabla de Impares	13
4.1. Construcción de la tabla	13
4.2. Longitud y cierre de una columna	13
4.3. Distribución de las longitudes	14
4.4. Lectura dinámica y enlace con la Tabla de Pares	14
4.5. Ejemplo explícito: primeras columnas	14

4.6. Propiedades estructurales	15
4.6.1. Alternancia de columnas cortas y largas	15
4.6.2. Lectura entre columnas	15
4.6.3. Columnas de igual longitud	15
4.7. Interpretación como atlas dinámico	15
4.8. Relación con la familia de triángulos impares	16
4.9. Resumen	16
5. Genealogía de enlaces	17
5.1. Motivación	17
5.2. Definición de genealogía	17
5.3. Antecedentes y sucesores	17
5.4. Ramas entrantes: parametrización exacta	18
5.5. Valoración y cambio de tamaño	18
5.6. Ejemplos de genealogías	18
5.6.1. Cadena de crecimiento inicial	18
5.6.2. Dos lecturas de la órbita de 7	18
5.6.3. Perfil de valoraciones	19
5.7. Genealogías y tablas	19
5.8. Conjuntos de enlaces y ramificación	19
5.9. Ejemplo calculado desde 23	19
5.10. Resumen	19
6. Puentes 2-ádicos	20
6.1. Motivación	20
6.2. Definición de puente 2-ádico	20
6.3. Lectura del puente bajo la función simplificada	21
6.4. Exponente y cambio de tamaño	21
6.5. Grafo de puentes	21
6.6. Grado entrante	21
6.7. Composición de puentes	22
6.8. Puentes y triángulos de la Tabla de Impares	22
6.9. Ejemplo: tres puentes en una fila	22
6.10. Resumen	22
7. Los triángulos $T(a)$: construcción y propiedades fundamentales	23
7.1. Motivación	23
7.2. Definición de la familia impar	23
7.3. Estructura de filas y columnas	24
7.4. Construcción formal	24
7.4.1. Seleccionar una columna de la Tabla de Impares	24
7.4.2. Asignar triángulo y fila	24

7.4.3. Generar las entradas de la fila	24
7.5. Recurrencias exactas	24
7.6. Ejemplo: el triángulo $T(0)$	25
7.7. Sentido de la infinitud	25
7.8. Interpretación aritmética	25
7.9. Correspondencia con la Tabla de Impares	25
7.10. Relación con los puentes acelerados	25
7.11. Regularidades internas	26
7.12. Ejemplo: el triángulo $T(4)$	26
7.13. Resumen	26
8. Relaciones entre los triángulos $T(a)$	27
8.1. La familia y sus coordenadas	27
8.2. Transición entre triángulos	27
8.2.1. Ejemplo de cambio de coordenadas	28
8.3. Genealogías y perfiles	28
8.4. Relaciones aritméticas entre las filas	28
8.5. Longitudes frente a alturas de puentes	28
8.6. Significado de los triángulos de índice pequeño	28
8.7. Columnas con gran longitud y puentes altos	29
8.8. Reconstrucción de la Tabla de Impares	29
8.9. Registro de conexiones	29
8.9.1. Grafo determinista de coordenadas	29
8.9.2. Frecuencias en rangos finitos	29
8.9.3. Etiquetas modulares	29
8.10. Resumen	29
9. Coordenadas 2-ádicas e identidades de los triángulos	30
9.1. Tres datos asociados a un impar	30
9.2. Identidad horizontal de una fila	30
9.3. Congruencias finitas y sus límites	31
9.4. Relaciones verticales y diagonales	31
9.5. Conteos de longitudes y valoraciones	31
9.6. Conexiones entre triángulos	31
9.7. Estabilidad algebraica de las figuras	32
9.8. Registro conjunto de datos	32
9.9. Alcance dinámico	32
9.10. Resumen	32
10. Codificación de la dinámica de Collatz mediante tramos	33
10.1. Tramos impares y tramos pares de una órbita	33
10.2. El grafo dinámico	34

10.3. Perfiles y coordenadas	34
10.4. Frecuencias entre encabezados	34
10.5. Rachas de crecimiento y puentes contractivos	35
10.6. El ciclo conocido y el alcance de las pruebas	35
10.7. Ejemplo de alternancia real	35
10.8. Balance exacto de una órbita	35
10.9. Interpretación geométrica	36
10.10 Relación entre los tres operadores	36
10.11 Modelo global y límite lógico	36
10.12 Resumen	36
11. La familia de triángulos pares y su enlace con la familia impar	37
11.1. Motivación	37
11.2. Definición de la familia par	37
11.2.1. Ejemplo $T(1)$	38
11.3. Correspondencia con la Tabla de Pares	38
11.4. Encuentro de las dos familias	38
11.5. Ejemplo completo de enlace	38
11.6. La extracción de la parte impar y el operador F	39
11.7. Relación estructural entre las familias	39
11.8. Alcance de la representación	39
11.9. Pares divisibles por tres	39
11.10 Resumen	39
12. Cálculos modulares y análisis de trayectorias concretas	40
12.1. Cálculo modular de valoraciones	40
12.2. Crecimiento, picos y contracción	40
12.3. Colas pares largas	41
12.4. Perfiles finitos	41
12.5. Reconstrucción sin listar todos los pares	41
12.6. Distribución entre encabezados	41
12.7. Patrones observados y alcance estadístico	41
12.8. Una trayectoria calculada	42
12.8.1. La órbita que comienza en 27	42
12.8.2. Encabezados de Mersenne	42
12.9. Coste de las representaciones	42
12.10 Resumen	42
13. Perspectiva unificada: Collatz como sistema 2-ádico estratificado	43
13.1. Tres operadores y un itinerario	43
13.2. Dos clasificaciones aritméticas	43
13.3. Transición de encabezados	44

13.4. Lectura por las dos familias de triángulos	44
13.5. Dinámica horizontal y vertical	44
13.6. Puentes y resolución acelerada	44
13.7. Frecuencias y alcance	44
13.8. El salto entre rachas completas	45
13.9. Convergencia: equivalencia y límite	45
13.10 Geometría de la codificación	45
13.11 Resumen	45
14. Conclusiones generales y líneas futuras de desarrollo	46
14.1. Resultados principales	46
14.1.1. Enlaces impares y puentes	46
14.1.2. Tabla de Impares y familia $T(a)$	46
14.1.3. Tabla de Pares y familia $T(b)$	46
14.1.4. Reglas de enlace entre familias	47
14.1.5. Dos valoraciones con funciones distintas	47
14.2. Límites demostrativos	47
14.3. Utilidad del marco	47
14.4. Líneas futuras de investigación	47
14.4.1. Transiciones del salto G	47
14.4.2. Estadísticas a lo largo de órbitas	47
14.4.3. Comparación entre rachas	48
14.4.4. Extensiones aritméticas	48
14.4.5. Grafo de encabezados	48
14.4.6. Edición y comparación de representaciones	48
14.5. Conclusión final	48
Epílogo	49
A. Terminología y notación	50
B. Tabla de Impares	52
C. Tabla de Pares	53
D. Triángulos elementales $T(0)$ y $T(4)$	54
E. Triángulo elemental $T(b)$	56
F. La trayectoria del número 127 en los triángulos	58

Índice de figuras

B.1. Tabla de Impares de S . Cada columna comienza en un impar, recorre su racha de impares consecutivos y termina en el primer par.	52
C.1. Tabla de Pares de S . La columna encabezada por cada par v contiene sus divisiones sucesivas por 2 hasta alcanzar el primer impar.	53
D.1. Triángulo impar $T(0)$, correspondiente a $q = 1$. Para $n \geq 1$, la fila n reproduce de izquierda a derecha la columna de la Tabla de Impares encabezada por $2^n - 1$ y termina en el par $3^n - 1$	54
D.2. Triángulo impar $T(4)$, correspondiente a $q = 5$. Para $n \geq 1$, la fila n reproduce, de izquierda a derecha, la columna de la Tabla de Impares encabezada por $5 \cdot 2^n - 1$ y termina en el par $5 \cdot 3^n - 1$	55
E.1. Triángulo par $T(1)$. Los tramos de la Tabla de Pares ocupan segmentos de columnas verticales que se leen de abajo arriba. Por ejemplo, $12 \rightarrow 6 \rightarrow 3$ ocupa un segmento de la segunda columna.	57
F.1. Recorrido tabular de 127, con rachas impares horizontales y divisiones pares verticales. Cada tramo impar aparece en el triángulo de índice reducido $q' - 1$, donde q' es la parte de q no divisible por 3.	59

Resumen

Se presentan dos representaciones tabulares de la función simplificada de Collatz

$$S(n) = \begin{cases} (3n + 1)/2, & n \text{ impar,} \\ n/2, & n \text{ par,} \end{cases}$$

que organizan sus rachas consecutivas de impares y sus cadenas de divisiones de pares. Las columnas de la Tabla de Impares se disponen como filas horizontales de una familia de triángulos $T(a)$; los tramos de la Tabla de Pares aparecen como segmentos verticales, leídos de abajo arriba, en otra familia $T(b)$.

Se distingue esta descomposición de los enlaces del operador impar acelerado $F(m) = (3m + 1)/2^{\nu_2(3m+1)}$. Para un impar m con $m + 1 = 2^n q$, q impar, una racha impar completa y su cola par determinan el salto

$$G(m) = \text{odd}(q3^n - 1) = F^n(m).$$

Las fórmulas describen exactamente las figuras y sus relaciones con las órbitas. No se obtiene de ellas una prueba de convergencia universal.

Capítulo 1

Introducción

La función clásica de Collatz se define por

$$C(n) = \begin{cases} 3n + 1, & n \text{ impar}, \\ n/2, & n \text{ par}. \end{cases}$$

Su versión simplificada S incorpora una división por dos en el paso impar. Ambas tienen la misma sucesión de impares visitados, descrita por el operador acelerado

$$F(m) = \text{odd}(3m + 1) = \frac{3m + 1}{2^{\nu_2(3m+1)}}.$$

Estos tres operadores se usarán con propósitos distintos: C muestra todos los pasos clásicos, S genera las dos tablas de este escrito y F registra sus enlaces consecutivos entre impares.

La Tabla de Impares comienza una columna en cada impar m y aplica S hasta obtener el primer par. La Tabla de Pares comienza una columna en cada par y divide sucesivamente por dos hasta obtener el primer impar. La salida de una columna es la entrada de una columna de la otra tabla. Esta alternancia reconstruye las órbitas de S .

Las figuras triangulares reorganizan esas columnas. En la familia impar, cada columna de la tabla se lee como una fila horizontal; en la familia par, cada tramo se localiza en un segmento de columna leído de abajo arriba. Los índices de estos triángulos se definen mediante factorizaciones de sus entradas. Se distinguirán siempre de la valoración $\nu_2(3m + 1)$, que mide la cola par asociada a un enlace particular de F .

El objetivo es formalizar ambas representaciones, demostrar sus fórmulas y precisar el alcance de sus conclusiones dinámicas. Las densidades modulares entre todos los encabezados no establecen por sí solas frecuencias a lo largo de cada órbita.

La factorización de las rachas mediante $m + 1 = 2^n q$ y la descripción de la dinámica por valoraciones 2-ádicas son conocidas en la literatura; véanse Terras [2] y el panorama de Lagarias [1]. La aportación de este escrito es su organización en dos familias de triángulos acopladas y el salto G entre rachas.

Capítulo 2

El operador 2-ádico sobre impares

El operador F registra el siguiente impar de la órbita clásica o simplificada. Se introduce antes de las tablas para precisar la relación entre un enlace impar y la cola par que lo acompaña.

2.1. Motivación

Tras el paso clásico $m \mapsto 3m + 1$, con m impar, aparecen una o más divisiones por dos hasta el siguiente impar. El operador F comprime ese bloque. La función simplificada S omite solo la primera entrada par $3m + 1$: empieza con $m \mapsto (3m + 1)/2$ y realiza, si hacen falta, las divisiones siguientes.

2.2. Definición del operador reducido

Definición 2.1 (Operador impar acelerado). Para m impar positivo, definimos

$$h(m) = \nu_2(3m + 1), \quad F(m) = \frac{3m + 1}{2^{h(m)}}.$$

El número $h(m) \geq 1$ es la valoración del puente que parte de m .

Si $3m + 1 = 2^a b$, con b impar, entonces $a = h(m)$ y $b = F(m)$. La factorización es única. La valoración puede variar de un enlace al siguiente.

2.3. Propiedades básicas

2.3.1. Determinismo 2-ádico

Para cada impar m , $3m + 1$ y su descomposición $2^{h(m)} F(m)$ están determinados. También se puede reconstruir m a partir de la pareja $(h(m), F(m))$ mediante

$$m = \frac{2^{h(m)} F(m) - 1}{3}.$$

La valoración $h(m)$ sola no determina el valor de $F(m)$.

2.3.2. Invariancia del dominio

El operador F lleva impares positivos a impares positivos. Desde un par inicial, las divisiones sucesivas alcanzan un impar; a partir de él se puede estudiar la órbita mediante F y recuperar después los pares intermedios.

2.3.3. Compatibilidad con la iteración clásica

Proposición 2.2. *Para cada impar m , si $a = h(m)$, se cumple $C^{a+1}(m) = F(m)$. Además, $S^a(m) = F(m)$.*

Demostración. Tras el paso clásico $m \mapsto 3m + 1$ se necesitan exactamente a divisiones por dos para obtener su parte impar. En S la primera división se incorpora al paso desde m , seguida de las $a - 1$ divisiones restantes. Por tanto ambos recorridos llegan a $F(m)$ en los números de pasos indicados. $\square$

2.4. El exponente $h(m)$ del puente

El valor $h(m)$ mide la longitud de la cola par del bloque clásico desde m hasta $F(m)$ y determina el signo del cambio entre esos dos impares cuando $m > 1$:

$$h(m) = 1 \implies F(m) = (3m + 1)/2 > m,$$

$$h(m) \geq 2 \implies F(m) \leq (3m + 1)/4 < m.$$

Este exponente no indica en qué fila de la familia triangular impar aparece la columna encabezada por m . Esa fila se determina por $\nu_2(m + 1)$.

2.5. Ejemplos ilustrativos

Ejemplo 2.3. $3 \cdot 7 + 1 = 22 = 2 \cdot 11$; así, $h(7) = 1$ y $F(7) = 11$. La columna impar encabezada por 7 será 7, 11, 17, 26, un objeto distinto del único enlace $7 \rightarrow 11$.

Ejemplo 2.4. $3 \cdot 21 + 1 = 64 = 2^6$; así, $h(21) = 6$ y $F(21) = 1$.

Ejemplo 2.5. $3 \cdot 27 + 1 = 82 = 2 \cdot 41$; así, $h(27) = 1$ y $F(27) = 41$.

2.6. Resumen del capítulo

Cada impar define un enlace de F y una factorización única $3m + 1 = 2^{h(m)}F(m)$. La Tabla de Impares, introducida después, agrupará varios pasos de S en una misma columna cuando aparezca una racha de impares.

Capítulo 3

Bloques clásicos entre impares consecutivos

En este capítulo llamamos *punte clásico* al bloque de la función clásica desde un impar hasta el siguiente impar. Esta denominación lo distingue de los tramos impares, columnas de la Tabla de Impares, que terminan en el primer par *después de una racha* bajo S .

3.1. Definición formal de puente clásico

Definición 3.1 (Puente clásico asociado a un impar). Si m es impar y $a = h(m)$, definimos

$$\mathcal{P}(m) = \left(m, 3m + 1, \frac{3m + 1}{2}, \dots, \frac{3m + 1}{2^a} \right).$$

El último término es $F(m)$.

Hay exactamente a términos pares entre m y $F(m)$ en este bloque clásico: $(3m + 1)/2^j$ para $0 \leq j < a$.

3.2. Descomposición 2-ádica del puente clásico

La factorización $3m + 1 = 2^a b$, con b impar, proporciona la *firma* (a, b) del puente clásico, donde $a = h(m)$ y $b = F(m)$. La firma permite recuperar $m = (2^a b - 1)/3$ y toda la sucesión $\mathcal{P}(m)$. No se identifica aquí una sucesión con el par ordenado que la codifica.

3.3. Los puentes clásicos como bloques deterministas

Proposición 3.2. *Todo impar m determina de forma única su puente clásico $\mathcal{P}(m)$. Los puentes clásicos consecutivos $\mathcal{P}(m), \mathcal{P}(F(m)), \dots$ reconstruyen la órbita clásica desde m , identificando el impar compartido en la frontera de dos puentes clásicos consecutivos.*

Demostración. La factorización $3m + 1 = 2^a b$ determina todos los términos de $\mathcal{P}(m)$. El término final $b = F(m)$ es el inicial del bloque siguiente. Al concatenarlos, las divisiones y

pasos impares son exactamente los de la función clásica. □

3.4. Estructura interna del puente clásico

Si $a = 1$, el primer paso de S desde m ya alcanza el impar $F(m)$; en particular, $(3m+1)/2$ no es par en ese caso. Si $a \geq 2$, los términos $(3m+1)/2, \dots, (3m+1)/2^{a-1}$ son pares y se leen en la Tabla de Pares desde su primer valor. La Tabla de Impares registra otra partición de la órbita: las rachas máximas de impares consecutivos bajo S .

3.5. Ejemplos

Ejemplo 3.3. Para $m = 5$, $3m + 1 = 16 = 2^4$ y $\mathcal{P}(5) = (5, 16, 8, 4, 2, 1)$.

Ejemplo 3.4. Para $m = 7$, $3m + 1 = 22 = 2 \cdot 11$ y $\mathcal{P}(7) = (7, 22, 11)$.

Ejemplo 3.5. Para $m = 27$, $3m + 1 = 82 = 2 \cdot 41$ y $\mathcal{P}(27) = (27, 82, 41)$.

3.6. Interpretación geométrica

La firma (a, b) organiza los puentes clásicos según el número de divisiones pares que contienen. En cambio, la coordenada triangular de la columna impar encabezada por m se determina factorizando $m+1 = 2^n q$. Para $m = 7$, por ejemplo, $a = h(7) = 1$ y $n = \nu_2(8) = 3$. Las dos mediciones describen segmentos distintos.

3.7. Clasificación por firmas 2-ádicas

El conjunto $E_a = \{m \text{ impar} : h(m) = a\}$ clasifica los puentes clásicos según su valoración. Esa clasificación no coincide con la familia de triángulos $T(q-1)$ que agrupa columnas completas de rachas impares. En particular, dos términos impares de una misma fila triangular pueden tener alturas h diferentes.

3.8. Puentes clásicos ascendentes y descendentes

Para $m > 1$, el puente clásico es ascendente si $h(m) = 1$ y descendente si $h(m) \geq 2$. Esto se deduce directamente de la desigualdad de la sección 2.4. Un descenso en un enlace no garantiza descenso de la órbita completa.

3.9. Resumen del capítulo

Los puentes clásicos codifican los enlaces consecutivos de F y permiten reconstruir la órbita clásica. Las columnas de la Tabla de Impares, que se introducen a continuación, son rachas de la función simplificada S (tramos impares) y no deben identificarse con esos puentes.

Capítulo 4

La Tabla de Impares

La Tabla de Impares organiza las rachas consecutivas que produce la función simplificada de Collatz

$$S(x) = \begin{cases} (3x+1)/2, & x \text{ impar,} \\ x/2, & x \text{ par.} \end{cases}$$

Cada columna empieza en un impar, continúa mientras los términos obtenidos son impares y termina en el primer par. La tabla representa, por tanto, una descomposición de las órbitas de S en bloques de impares consecutivos y su par de salida. No es la tabla de los puentes clásicos $(m, 3m+1, \dots, F(m))$ definidos en el capítulo 3: estos últimos comprimen la cola par que sigue a *cada* impar. La relación entre ambas representaciones se describe en el apartado 4.4.

4.1. Construcción de la tabla

Enumeramos los impares positivos $m = 2k-1$, $k \geq 1$, y asignamos al impar m la columna k . Definimos

$$r(m) = \nu_2(m+1), \quad I_m(j) = 3^j \frac{m+1}{2^j} - 1 \quad (0 \leq j \leq r(m)).$$

La columna asociada a m consta de $I_m(0), I_m(1), \dots, I_m(r(m))$. Para $j < r(m)$, $I_m(j)$ es impar y $S(I_m(j)) = I_m(j+1)$; en cambio, $I_m(r(m))$ es par. En particular, el primer par de salida se incluye en la columna. Esta definición se aplica también a $m = 1$: su columna es 1, 2.

4.2. Longitud y cierre de una columna

Si $m+1 = 2^r q$ con q impar, entonces

$$I_m(j) = 3^j 2^{r-j} q - 1 \quad (0 \leq j \leq r), \quad I_m(r) = 3^r q - 1.$$

La columna contiene exactamente r pasos de S , con r entradas impares y una entrada par final. Su longitud viene dada por $\nu_2(m+1)$, no por $\nu_2(3m+1)$. Esta última valoración, que denotaremos por $h(m)$, cuenta las divisiones por dos necesarias para alcanzar $F(m)$ después de aplicar $3m+1$ al impar m . Por ejemplo, la columna de 7 es 7, 11, 17, 26, con $r(7) = 3$, mientras que $h(7) = \nu_2(22) = 1$.

4.3. Distribución de las longitudes

Entre los impares positivos, la proporción natural de encabezados con $r(m) = r$ es 2^{-r} para $r \geq 1$. En efecto,

$$r(m) = r \iff m \equiv 2^r - 1 \pmod{2^{r+1}}.$$

Así, la mitad de las columnas tienen un solo paso de S hasta el primer par; una cuarta parte tiene dos pasos, etc. Se trata de un conteo entre columnas de la tabla. No implica por sí mismo una frecuencia de columnas cortas a lo largo de cada órbita individual.

4.4. Lectura dinámica y enlace con la Tabla de Pares

Al recorrer una órbita de S , leemos una columna de la Tabla de Impares hasta su primer par $v = I_m(r(m))$. Después pasamos a la columna de la Tabla de Pares encabezada por v y la recorremos mediante divisiones por dos hasta el siguiente impar $u = v/2^{\nu_2(v)}$. Desde u comienza la siguiente columna impar. En la frontera, el par final de una columna impar es el encabezado de la columna par siguiente; el impar final de la columna par es el encabezado de la columna impar siguiente.

El operador impar acelerado $F(x) = (3x+1)/2^{\nu_2(3x+1)}$ tiene una lectura distinta: registra el siguiente impar después de cada impar x . En particular, $F(7) = 11$, mientras que el par de salida de la columna encabezada por 7 es 26 y su siguiente impar es 13. No cabe identificar el salto de 7 al final de su columna con una sola aplicación de F .

4.5. Ejemplo explícito: primeras columnas

encabezado m	1	3	5	7	9
$j = 0$	1	3	5	7	9
$j = 1$	2	5	8	11	14
$j = 2$			8	17	
$j = 3$				26	

Se leen así las cadenas $1 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 5 \rightarrow 8, 5 \rightarrow 8, 7 \rightarrow 11 \rightarrow 17 \rightarrow 26$ y $9 \rightarrow 14$. Por ejemplo, la continuación de la columna de 7 por ambas tablas es

$$7 \rightarrow 11 \rightarrow 17 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1.$$

Aquí los segmentos $26 \rightarrow 13$, $20 \rightarrow 10 \rightarrow 5$ y $8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ se leen en la Tabla de Pares.

4.6. Propiedades estructurales

4.6.1. Alternancia de columnas cortas y largas

Para un encabezado impar m , la longitud impar de su columna es $r(m) = \nu_2(m+1)$. Por tanto,

$$r(m) = 1 \iff m \equiv 1 \pmod{4}, \quad r(m) \geq 2 \iff m \equiv 3 \pmod{4}.$$

Los encabezados impares consecutivos m y $m+2$ pertenecen a clases opuestas módulo 4. Por ello, sus columnas *no* pueden tener ambas la misma longitud: una tiene longitud impar 1 y la otra longitud impar al menos 2. Para $r \geq 1$, la congruencia $m \equiv 2^r - 1 \pmod{2^{r+1}}$ determina exactamente las columnas de longitud impar r . Ésta es una regularidad modular verificable en toda la tabla.

La valoración $h(m) = \nu_2(3m+1)$ obedece asimismo $h(m) = 1 \iff m \equiv 3 \pmod{4}$ y $h(m) \geq 2 \iff m \equiv 1 \pmod{4}$. Las longitudes $r(m)$ y $h(m)$ miden segmentos diferentes de la dinámica simplificada.

4.6.2. Lectura entre columnas

La columna encabezada por m termina en el par

$$v = 3^{r(m)} \frac{m+1}{2^{r(m)}} - 1.$$

La transición tabular lleva desde esta columna impar a la columna de la Tabla de Pares encabezada por v y, una vez dividido v hasta su parte impar $u = v/2^{\nu_2(v)}$, a la columna impar encabezada por u . Este enlace puede desplazar la lectura hacia un encabezado mayor o menor. Su dirección se calcula para cada caso; la representación visual no establece una deriva global de la órbita.

4.6.3. Columnas de igual longitud

Dos columnas tienen longitud impar r precisamente cuando sus encabezados pertenecen a la misma clase $2^r - 1 \pmod{2^{r+1}}$. Esta coincidencia clasifica encabezados distintos; no afirma que una órbita individual visite periódicamente esa clase ni que las alturas posteriores $h(m)$ coincidan.

4.7. Interpretación como atlas dinámico

La Tabla de Impares contiene todas las rachas que empiezan en un impar y terminan en el primer par de la función simplificada S . La Tabla de Pares contiene las divisiones sucesivas de cada par hasta el primer impar. Para reconstruir una órbita de S se alternan ambas tablas

por sus términos terminales y encabezados. Puede repetirse una entrada en la frontera de dos columnas si se escriben completas; esa repetición representa un único estado compartido, no un paso adicional de S .

Para obtener el operador acelerado F a partir de las tablas, partimos de un impar m , damos un paso impar de S y, si el resultado es par, continuamos las divisiones de la Tabla de Pares hasta el siguiente impar. Si el resultado del primer paso ya es impar, ése es $F(m)$. En general este procedimiento no exige recorrer la columna impar encabezada por m hasta su final.

4.8. Relación con la familia de triángulos impares

Toda columna impar tiene un encabezado único de la forma $m = q2^n - 1$, con q impar positivo y $n = \nu_2(m + 1) \geq 1$. La correspondiente fila triangular es

$$A_{q,n}(j) = q3^j 2^{n-j} - 1, \quad 0 \leq j \leq n.$$

Se lee de izquierda a derecha e incluye el primer par al final. Para $q = 1$ se obtienen las filas no iniciales de la figura $T(0)$ del Apéndice D; para $q = 5$, las de $T(4)$. Si se adopta la convención figurativa $T(q - 1)$, su índice $q - 1$ etiqueta el parámetro impar q ; *no* representa la valoración $\nu_2(3m + 1)$ de los elementos de la fila. Cada columna de la Tabla de Impares aparece en una fila única de esta familia parametrizada por q impar, debido a la factorización única de $m + 1$ en potencia de 2 por impar. Las filas iniciales aisladas $q - 1$ de las figuras son convenciones de presentación y, cuando son pares, no son columnas de la Tabla de Impares.

4.9. Resumen

La tabla ordena las rachas impares de S según su encabezado; los triángulos impares reordenan esas mismas rachas en filas según la parte impar q de $m + 1$ y la longitud n . La lectura orbital combina la Tabla de Impares con la Tabla de Pares. La altura $\nu_2(3m + 1)$ del puente clásico es otra cantidad, útil para describir la cola par que sigue a cada impar.

Capítulo 5

Genealogía de enlaces

La Tabla de Impares contiene una columna por cada impar y registra la racha de la función simplificada S hasta el primer par. Para estudiar la sucesión de *impares* de una órbita emplearemos, además, el operador acelerado

$$F(m) = \frac{3m+1}{2^{h(m)}}, \quad h(m) = \nu_2(3m+1).$$

Una columna de la tabla y el puente clásico desde m son objetos distintos. Este capítulo define las genealogías mediante F ; su relación precisa con las tablas se explica en la sección 5.7.

5.1. Motivación

La órbita de F registra todos los impares visitados por una órbita de la función simplificada S , omitiendo los pares intermedios. Un enlace $m \rightarrow F(m)$ atraviesa el primer paso impar de S y, cuando es necesario, las divisiones posteriores por dos. La igualdad $3m+1 = 2^{h(m)}F(m)$ identifica exactamente este enlace.

5.2. Definición de genealogía

Llamamos *genealogía directa* de un impar positivo m a la órbita $(F^j(m))_{j \geq 0}$. Puede terminar su descripción en la primera llegada a 1; si se sigue iterando, $F(1) = 1$. La secuencia de etiquetas $h(F^j(m))$ se denomina *perfil de valoraciones*. Se trata de una sucesión definida incluso si la órbita no llega a 1. Su finitud hasta 1 para todo m es precisamente la conjetura de Collatz, no una propiedad asumida en la definición.

5.3. Antecesoros y sucesores

En el grafo dirigido de F , cada impar m tiene un sucesor único $F(m)$, pero un impar b puede tener varios antecesoros. Llamamos *enlace entrante* a la flecha $m \rightarrow b$ cuando $F(m) = b$. Si se llama padre a m e hijo a b , esas palabras se refieren exclusivamente a esta flecha dirigida;

el grafo inverso puede ramificarse. Una genealogía directa, por sí sola, es un camino, no un árbol.

5.4. Ramas entrantes: parametrización exacta

Para un impar b , todos los posibles antecesores vienen de

$$m_a = \frac{2^a b - 1}{3}, \quad a \geq 1,$$

siempre que $2^a b \equiv 1 \pmod{3}$. Si $3 \mid b$ no hay antecesores, ya que dicha congruencia es imposible. Si $b \equiv 1 \pmod{3}$, sirven los exponentes positivos pares; si $b \equiv 2 \pmod{3}$, sirven los exponentes positivos impares. En estos dos casos hay infinitos antecesores impares positivos: la expresión es entera e impar, y $3m_a + 1 = 2^a b$ tiene valoración exactamente a . Esta descripción resuelve la ecuación $F(m) = b$ sin hipótesis sobre convergencia.

5.5. Valoración y cambio de tamaño

El exponente $h(m)$ mide las divisiones por dos entre $3m+1$ y el siguiente impar. Si $h(m) = 1$, entonces $F(m) = (3m+1)/2 > m$ para $m > 1$. Si $h(m) \geq 2$, $F(m) \leq (3m+1)/4 < m$ para $m > 1$. En particular, $h(m) \geq 5$ produce la contracción $F(m) \leq (3m+1)/32$. Esto determina el signo del cambio en *ese enlace*; no determina la valoración del enlace siguiente ni la evolución a largo plazo.

5.6. Ejemplos de genealogías

5.6.1. Cadena de crecimiento inicial

Para $m = 27$ se obtiene $27 \rightarrow 41 \rightarrow 31 \rightarrow 47 \rightarrow 71 \rightarrow 107 \rightarrow \dots$. Este prefijo presenta crecimientos y descensos, y no se clasifica como una cadena monótonamente descendente.

5.6.2. Dos lecturas de la órbita de 7

La genealogía bajo F es

$$7 \rightarrow 11 \rightarrow 17 \rightarrow 13 \rightarrow 5 \rightarrow 1.$$

La órbita de la función simplificada, con pares visibles, es

$$7 \rightarrow 11 \rightarrow 17 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1.$$

Ambas describen la misma trayectoria con distinta resolución. La primera columna impar 7, 11, 17, 26 no coincide con un único enlace de F : incluye varios impares de su genealogía.

5.6.3. Perfil de valoraciones

Las valoraciones pueden repetirse o cambiar de un enlace al siguiente. La existencia de segmentos de valoraciones iguales se comprueba en ejemplos concretos; la frecuencia de tales segmentos a lo largo de todas las órbitas no se deduce de la distribución modular de los impares.

5.7. Genealogías y tablas

Para leer el enlace $m \rightarrow F(m)$ en las tablas, se da primero el paso $m \rightarrow (3m+1)/2$ en la Tabla de Impares. Si el resultado es par, se continúan sus divisiones por dos en la Tabla de Pares hasta alcanzar $F(m)$. Si es impar, ya es $F(m)$. En cambio, al recorrer *hasta el final* la columna impar encabezada por m se obtiene el primer par que sigue a una racha de impares, que puede abarcar varios enlaces de F . Las dos lecturas no deben identificarse.

5.8. Conjuntos de enlaces y ramificación

La órbita directa de m induce el conjunto de enlaces $\{(F^j(m), F^{j+1}(m)) : j \geq 0\}$. Los conjuntos de antecesores descritos en la sección 5.4 constituyen ramas inversas. La posición de esos enlaces en los triángulos de las tablas exige aplicar las reglas de colocación de columnas del capítulo 4; no se obtiene de la mera existencia del grafo inverso.

5.9. Ejemplo calculado desde 23

La genealogía correcta es

$$23 \xrightarrow{h=1} 35 \xrightarrow{h=1} 53 \xrightarrow{h=5} 5 \xrightarrow{h=4} 1.$$

En efecto, $3 \cdot 53 + 1 = 160 = 2^5 \cdot 5$. La cadena $23 \rightarrow 35 \rightarrow 53 \rightarrow 13 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ no es una órbita de F : $F(53) = 5$, mientras que $F(13) = 5$. Se ve aquí una coincidencia de sucesores, no el enlace $53 \rightarrow 13$.

5.10. Resumen

La genealogía directa es la órbita del operador impar acelerado F ; sus enlaces tienen valoración $h(m)$ y antecesores dados por una congruencia módulo 3. Las columnas de las dos tablas representan bloques de la función simplificada S y permiten reconstruir esos enlaces sin identificar una columna impar completa con un solo paso de F .

Capítulo 6

Puentes 2-ádicos

En el capítulo anterior definimos las genealogías como órbitas del operador impar acelerado F . Denominaremos *punto 2-ádico* a la identidad que etiqueta un enlace de ese operador. Para leer el mismo enlace en las tablas de la función simplificada S es necesario distinguir entre la racha impar que contiene a su origen y la cola par posterior a ese origen.

6.1. Motivación

Para cada impar m , la expresión $3m+1$ se factoriza de forma única como potencia positiva de 2 por un impar. La potencia indica cuántas divisiones hacen falta para llegar al siguiente impar $F(m)$. Este enlace puede quedar dentro de una misma columna de la Tabla de Impares, o pasar por una columna de la Tabla de Pares. La identidad de factorización permite describir ambos casos sin identificar una columna impar completa con un único paso de F .

6.2. Definición de punto 2-ádico

Para m impar positivo, ponemos

$$h(m) = \nu_2(3m+1), \quad b = F(m) = \frac{3m+1}{2^{h(m)}}.$$

El *punto 2-ádico* asociado al enlace $m \rightarrow b$ es

$$3m+1 = 2^{h(m)}b.$$

La pareja $(h(m), b)$ determina m mediante $m = (2^{h(m)}b - 1)/3$, siempre que el numerador sea divisible por 3. El punto especifica un enlace de F ; por sí solo no identifica el índice ni la fila del triángulo figurativo que contiene la columna de m .

6.3. Lectura del puente bajo la función simplificada

El primer paso de S desde m es

$$S(m) = \frac{3m+1}{2} = 2^{h(m)-1}b.$$

Si $h(m) = 1$, este término ya es impar y coincide con b . Si $h(m) \geq 2$, es par: a continuación se divide por 2 otras $h(m) - 1$ veces hasta alcanzar b . Por tanto,

$$m \xrightarrow{S} 2^{h(m)-1}b \xrightarrow{S} 2^{h(m)-2}b \xrightarrow{S} \dots \xrightarrow{S} b$$

representa exactamente el puente. En el segundo caso, el primer término par es el encabezado de una columna de la Tabla de Pares; los siguientes términos se leen en ella.

6.4. Exponente y cambio de tamaño

El exponente $h(m)$ mide la profundidad de la cola par posterior al paso impar inicial. Para $m > 1$, el enlace crece si $h(m) = 1$ y decrece si $h(m) \geq 2$, pues

$$h(m) = 1 \implies F(m) = \frac{3m+1}{2} > m, \quad h(m) \geq 2 \implies F(m) \leq \frac{3m+1}{4} < m.$$

En particular, $h(m) \geq 5$ implica $F(m) \leq (3m+1)/32$. Estos son resultados sobre el enlace actual; no imponen un valor a $h(F(m))$.

6.5. Grafo de puentes

El grafo dirigido con vértices impares positivos y flecha $m \rightarrow F(m)$ tiene exactamente una flecha saliente en cada vértice. Podemos etiquetarla por $h(m)$. La Tabla de Impares ofrece un vértice encabezado por cada impar, pero para trazar la flecha se aplica la regla de la sección 6.3 y, si hace falta, se consulta también la Tabla de Pares. No se recorre obligatoriamente hasta el final la columna impar de m .

6.6. Grado entrante

Un impar b divisible por 3 no tiene preimágenes bajo F . Todo impar b no divisible por 3 tiene infinitas:

$$m_a = \frac{2^a b - 1}{3}, \quad a \geq 1, \quad 2^a b \equiv 1 \pmod{3}.$$

Para $b \equiv 1 \pmod{3}$ sirven los a pares positivos; para $b \equiv 2 \pmod{3}$, los a impares positivos. Por ello el grado entrante, entendido como número de preimágenes distintas sin límite de tamaño, no distingue a 1 de 5 o de otro impar no divisible por 3. Cualquier noción de “densidad de preimágenes” exige un rango y una medida precisamente especificados.

6.7. Composición de puentes

Si $m_1 = F(m_0)$ y $m_2 = F(m_1)$, con exponentes a_0, a_1 , entonces

$$3m_0 + 1 = 2^{a_0}m_1, \quad 3m_1 + 1 = 2^{a_1}m_2.$$

El destino de una flecha es el origen de la siguiente. Esto permite concatenar los enlaces de una genealogía, sin inferir de la concatenación ninguna propiedad de convergencia o de distribución de los exponentes.

6.8. Puentes y triángulos de la Tabla de Impares

La columna impar encabezada por m aparece en la fila identificada por

$$n = \nu_2(m+1), \quad q = \frac{m+1}{2^n} \quad (q \text{ impar}).$$

En la familia figurativa $T(q-1)$ es la fila n y su entrada j es $q3^j2^{n-j} - 1$, para $0 \leq j \leq n$. Estos índices se calculan a partir de $m+1$. El puente tiene exponente $h(m) = \nu_2(3m+1)$, calculado a partir de $3m+1$. Así, una misma fila triangular puede contener enlaces de F de exponentes diferentes; no es una fila de puentes con exponente constante.

6.9. Ejemplo: tres puentes en una fila

Para $m = 23$ se tiene $m+1 = 24 = 3 \cdot 2^3$. La fila $n = 3$ del triángulo figurativo $T(2)$ es

$$23, 35, 53, 80.$$

Los tres impares consecutivos tienen los puentes

$$3 \cdot 23 + 1 = 2 \cdot 35, \quad 3 \cdot 35 + 1 = 2 \cdot 53, \quad 3 \cdot 53 + 1 = 2^5 \cdot 5.$$

Así, sus exponentes son 1, 1, 5. Los primeros dos enlaces $23 \rightarrow 35 \rightarrow 53$ se leen dentro de la fila impar; el tercero comienza con $53 \rightarrow 80$ y continúa en la Tabla de Pares: $80 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5$. El mismo ejemplo muestra por qué la fila de una familia impar no puede clasificarse por un único valor de h .

6.10. Resumen

El puente $3m+1 = 2^{h(m)}F(m)$ describe un enlace de la genealogía acelerada y permite reconstruirlo con las dos tablas. Las filas de los triángulos impares se clasifican mediante $m+1 = 2^nq$. Ambos criterios son exactos y responden a preguntas diferentes.

Capítulo 7

Los triángulos $T(a)$: construcción y propiedades fundamentales

La familia impar de triángulos dispone en filas las columnas de la Tabla de Impares. Cada fila se lee de izquierda a derecha mediante la función simplificada S y termina en su primer par. El parámetro del triángulo se obtiene de la parte impar de $m+1$, siendo m el encabezado de la columna. No es la valoración $h(m) = \nu_2(3m+1)$ del puente acelerado.

7.1. Motivación

Cada encabezado impar m determina de manera única dos parámetros

$$n = \nu_2(m+1) \geq 1, \quad q = \frac{m+1}{2^n} \quad (q \text{ impar positivo}).$$

Por tanto $m = q2^n - 1$. Agrupar las columnas de la tabla por el valor de q produce familias de filas cada vez más largas. Las figuras $T(0)$ y $T(4)$ del Apéndice D corresponden respectivamente a $q = 1$ y $q = 5$.

7.2. Definición de la familia impar

Para q impar positivo, definimos el triángulo impar $T(q-1)$ por sus filas de índice $n \geq 1$:

$$T(q-1)_{n,j} = q3^j2^{n-j} - 1, \quad 0 \leq j \leq n.$$

La fila n comienza en $q2^n - 1$ y coincide con la columna de la Tabla de Impares encabezada por ese número. Se puede anteponer, como en las figuras del Apéndice D, la entrada aislada $q-1$ en la fila $n=0$; es una convención gráfica y no una columna de la Tabla de Impares cuando $q-1$ es par. Los índices de esta familia son, según esta convención, $q-1 = 0, 2, 4, 6, \dots$. El nombre $T(a)$ de esta familia no debe confundirse con una partición por los valores de $h(m)$.

7.3. Estructura de filas y columnas

En cada fila n , los términos $j < n$ son impares y el término $j = n$ es par. Las filas se leen horizontalmente:

$$S(T(q-1)_{n,j}) = T(q-1)_{n,j+1} \quad (0 \leq j < n).$$

Las columnas de un triángulo reúnen posiciones de filas distintas. En general no constituyen órbitas verticales de S ni genealogías del operador F .

7.4. Construcción formal

7.4.1. Seleccionar una columna de la Tabla de Impares

Tomamos su encabezado m y calculamos la factorización $m+1 = 2^n q$, con $n \geq 1$ y q impar.

7.4.2. Asignar triángulo y fila

La columna se coloca horizontalmente en la fila n del triángulo $T(q-1)$. La descomposición única de $m+1$ impide que una misma columna aparezca en dos triángulos o en dos filas diferentes.

7.4.3. Generar las entradas de la fila

El encabezado ocupa la posición $j = 0$; las restantes entradas se obtienen mediante $q3^j 2^{n-j} - 1$, para $1 \leq j \leq n$. No es necesario recorrer una genealogía de F para decidir la posición de la columna.

7.5. Recurrencias exactas

La disposición triangular satisface tres identidades complementarias, para los índices en que aparecen ambos lados:

$$\begin{aligned} T(q-1)_{n,j+1} &= \frac{3T(q-1)_{n,j} + 1}{2} & (j < n), \\ T(q-1)_{n+1,j} &= 2T(q-1)_{n,j} + 1 & (j \leq n), \\ T(q-1)_{n+1,j+1} &= 3T(q-1)_{n,j} + 2 & (j \leq n). \end{aligned}$$

La primera es un paso horizontal real de S ; las otras dos relacionan celdas de filas diferentes y son identidades algebraicas, no pasos de una órbita. En ese sentido preciso se puede llamar al dibujo “triángulo sesgado”, sin atribuirle una regla aditiva tipo Pascal que no se haya demostrado.

7.6. Ejemplo: el triángulo $T(0)$

Para $q = 1$, las primeras filas son

$n = 0$	0				
$n = 1$	1	2			
$n = 2$	3	5	8		
$n = 3$	7	11	17	26	
$n = 4$	15	23	35	53	80.

Cada fila con $n \geq 1$ reproduce una columna de la Tabla de Impares. Por ejemplo, 7, 11, 17, 26 es la columna de índice 4, porque 7 es el cuarto impar positivo.

7.7. Sentido de la infinitud

Para cada q impar hay una fila de longitud $n + 1$ para todo $n \geq 1$. Ésta es una afirmación algebraica sobre la infinitud del dibujo. No implica que una órbita de F visite infinitas veces un triángulo dado, una longitud dada o una clase de valoraciones dada.

7.8. Interpretación aritmética

Los parámetros q y n extraen respectivamente la parte impar y la valoración 2-ádica de $m + 1$. Las recurrencias del apartado 7.5 describen relaciones entre entradas de una misma fila o de filas distintas. Ninguna de estas identidades establece por sí sola frecuencias de visita de una órbita individual.

7.9. Correspondencia con la Tabla de Impares

La correspondencia

$$m \longleftrightarrow (q, n) = \left(\frac{m+1}{2^{\nu_2(m+1)}}, \nu_2(m+1) \right)$$

es biyectiva entre encabezados impares positivos y filas no iniciales de la familia $\{T(0), T(2), T(4), \dots\}$. A cada fila le corresponde una columna completa de la Tabla de Impares, incluido su par de salida. Las filas iniciales aisladas son solo anclas de la presentación gráfica.

7.10. Relación con los puentes acelerados

Cada término impar $x = T(q-1)_{n,j}$, $j < n$, tiene su puente $3x+1 = 2^{h(x)}F(x)$. Si $j < n-1$, el siguiente término de la fila es impar, de modo que $h(x) = 1$ y $F(x) = T(q-1)_{n,j+1}$. En el último impar $j = n-1$, el paso horizontal produce el par $q3^n - 1$, que puede tener más de una división por 2 antes de alcanzar $F(x)$. El exponente $h(x)$ no es el índice $q-1$ del triángulo.

7.11. Regularidades internas

Las tres recurrencias del apartado 7.5 proporcionan relaciones horizontales, verticales y diagonales exactas. Estas relaciones describen el arreglo de los números. En particular, la relación vertical $u \mapsto 2u + 1$ y la diagonal $u \mapsto 3u + 2$ no deben leerse como transiciones de la función simplificada en una órbita.

7.12. Ejemplo: el triángulo $T(4)$

Para $q = 5$, las filas $n = 1, 2, 3$ son

$$9, 14; \quad 19, 29, 44; \quad 39, 59, 89, 134.$$

Coinciden con las respectivas columnas de la Tabla de Impares. Sus encabezados son $5 \cdot 2^n - 1$. La etiqueta $4 = q - 1$ identifica esta familia de filas y no significa que sus impares tengan $h(x) = 4$.

7.13. Resumen

Los triángulos impares se construyen por filas a partir de las columnas de la Tabla de Impares. Su clasificación se obtiene factorizando $m + 1 = 2^n q$. Las identidades del dibujo y los enlaces de las órbitas se estudian conjuntamente, manteniendo separados el índice figurativo del triángulo y la valoración $h(m) = \nu_2(3m + 1)$.

Capítulo 8

Relaciones entre los triángulos $T(a)$

Los triángulos impares $T(q-1)$ reordenan las columnas de la Tabla de Impares. Para estudiar el paso de una columna a la siguiente conviene distinguir entre *aparición como celda* y *pertenencia como encabezado*. Un impar puede figurar como entrada interior de una fila y tener su propia columna en la fila de otro triángulo. Clasificaremos un impar m por el triángulo que contiene la columna *encabezada* por m .

8.1. La familia y sus coordenadas

La familia de triángulos impares es $\mathcal{T} = \{T(q-1) : q \geq 1 \text{ impar}\}$. Todo impar positivo m posee coordenadas únicas

$$(q(m), n(m)) = \left(\frac{m+1}{2^{\nu_2(m+1)}}, \nu_2(m+1) \right).$$

Su columna ocupa la fila $n(m)$ de $T(q(m)-1)$. Las coordenadas no son valoraciones de $3m+1$.

8.2. Transición entre triángulos

Para pasar del encabezado m al siguiente encabezado impar $F(m)$, calculamos sus coordenadas $(q(F(m)), n(F(m)))$. En un caso importante existe una regla explícita. Si $n(m) \geq 2$, escribimos $m = q2^n - 1$. Entonces

$$F(m) = \frac{3m+1}{2} = 3q2^{n-1} - 1, \quad (q(F(m)), n(F(m))) = (3q, n-1).$$

Por tanto el enlace sale de la fila n de $T(q-1)$ y llega al encabezado de la fila $n-1$ de $T(3q-1)$. Aunque $F(m)$ también aparece como segunda celda de la fila de partida, su *columna propia* se clasifica en el segundo triángulo.

Si $n(m) = 1$, entonces $m = 2q - 1$ y

$$3m+1 = 2(3q-1), \quad F(m) = \frac{3q-1}{2^{\nu_2(3q-1)}}.$$

Aquí la coordenada del siguiente encabezado se obtiene factorizando $F(m) + 1$; no se deduce del índice $q - 1$ mediante la regla anterior.

8.2.1. Ejemplo de cambio de coordenadas

En la genealogía $7 \rightarrow 11 \rightarrow 17 \rightarrow 13 \rightarrow 5 \rightarrow 1$, las coordenadas de los tres primeros encabezados son

$$7 : (q, n) = (1, 3), \quad 11 : (3, 2), \quad 17 : (9, 1).$$

Así, los dos primeros enlaces entre encabezados recorren $T(0) \rightarrow T(2) \rightarrow T(8)$. No obstante, 7, 11, 17, 26 aparecen juntos *como celdas* de la fila $n = 3$ de $T(0)$. No hay contradicción: son dos usos diferentes de la palabra “estar” en un triángulo.

8.3. Genealogías y perfiles

Toda genealogía $m, F(m), F^2(m), \dots$ determina una sucesión de coordenadas $(q(F^j(m)), n(F^j(m)))$ y, separadamente, una sucesión de valoraciones $h(F^j(m))$ con $h(x) = \nu_2(3x + 1)$. La pareja (q, n) determina el encabezado $m = q2^n - 1$ y, por ello, el paso siguiente; el solo valor q o el solo valor h no determina una órbita.

8.4. Relaciones aritméticas entre las filas

En una fila de $T(q-1)$, las celdas son $q3^j2^{n-j} - 1$. Las recurrencias horizontales, verticales y diagonales del capítulo 7 dan identidades exactas entre sus celdas. La transición entre *encabezados* de diferentes triángulos para $n \geq 2$ se describe en cambio por $(q, n) \mapsto (3q, n-1)$. Conviene indicar cuál de estas relaciones se emplea antes de llamar “diagonal” a una conexión.

8.5. Longitudes frente a alturas de puentes

La longitud de columna $n(m) = \nu_2(m+1)$ se distribuye entre encabezados impares con proporciones 2^{-n} , $n \geq 1$. También $h(m) = \nu_2(3m+1)$ tiene proporciones 2^{-h} entre impares, pero los dos parámetros clasifican objetos distintos. Estas proporciones no prueban que el perfil de una órbita individual sea descendente, ni que un triángulo con índice pequeño atraiga a las órbitas.

8.6. Significado de los triángulos de índice pequeño

El índice figurativo es $q-1$. Fijar un valor pequeño de q selecciona encabezados $m = q2^n - 1$ al variar n . Hay infinitos, pero su densidad natural entre los impares es cero. Por tanto, la afirmación “la mitad de las columnas tiene longitud 1” no equivale a afirmar que el triángulo $T(0)$, o un grupo finito de triángulos de índice pequeño, contenga la mitad de las columnas.

8.7. Columnas con gran longitud y puentes altos

Una columna larga tiene $n(m)$ grande y contiene una racha larga de impares antes de su par terminal. Un puente alto tiene $h(m)$ grande y comprime $3m + 1$ hasta $F(m)$. No son el mismo fenómeno: para $m = 7$, $n(7) = 3$ y $h(7) = 1$. Una contracción fuerte en un puente no obliga a que el puente siguiente tenga valoración baja.

8.8. Reconstrucción de la Tabla de Impares

La colección de *filas* con $n \geq 1$ de todos los $T(q-1)$, q impar positivo, está en correspondencia biyectiva con las columnas de la Tabla de Impares. Ésta es la descomposición exacta de la tabla. El conjunto de valores escritos en celdas no es disjunto: un mismo entero puede aparecer en varias filas.

8.9. Registro de conexiones

8.9.1. Grafo determinista de coordenadas

El grafo con vértices (q, n) , q impar y $n \geq 1$, representa sin pérdida de información la dinámica impar de F , ya que $m = q2^n - 1$. Cada vértice tiene una salida determinada por la fórmula de la sección 8.2.

8.9.2. Frecuencias en rangos finitos

Si se desea contar transiciones entre índices de triángulos, debe fijarse un conjunto finito de encabezados, por ejemplo $m \leq X$, y definir el cociente entre un número de enlaces y el número de encabezados considerados. Tal cociente depende de X y de la medida elegida. No se presupone una matriz de probabilidades que describa las visitas de cada órbita sin una demostración adicional.

8.9.3. Etiquetas modulares

Las congruencias de q , n y $h(m)$ permiten refinar el grafo. Cada afirmación modular ha de especificar el módulo y la regla de transición; la semejanza visual entre dibujos no proporciona por sí sola una equivalencia dinámica.

8.10. Resumen

Las conexiones entre triángulos se obtienen clasificando los *encabezados* de las columnas. En el régimen $n \geq 2$, el paso de F obedece la regla exacta $(q, n) \mapsto (3q, n-1)$. Las celdas de una fila y los encabezados de sus propias columnas tienen funciones distintas en esta descripción.

Capítulo 9

Coordenadas 2-ádicas e identidades de los triángulos

Las figuras triangulares poseen identidades algebraicas exactas. Conviene llamar *coordenadas* a los parámetros que ubican una columna y reservar la palabra *invariante* para una propiedad cuya conservación bajo una transformación concreta se haya demostrado. Aquí distinguimos las recurrencias de las figuras, las congruencias finitas y los enlaces del operador acelerado F .

9.1. Tres datos asociados a un impar

Para un encabezado impar m definimos

$$n(m) = \nu_2(m+1), \quad q(m) = \frac{m+1}{2^{n(m)}}, \quad h(m) = \nu_2(3m+1).$$

El par $(q(m), n(m))$ determina la fila del triángulo impar y el propio $m = q(m)2^{n(m)} - 1$. El dato $h(m)$ etiqueta el enlace $m \rightarrow F(m)$. No es constante en toda la fila, como muestra 23, 35, 53, 80: los tres impares tienen $h = 1, 1, 5$.

9.2. Identidad horizontal de una fila

En la fila n del triángulo $T(q-1)$ ponemos $A_j = q3^j2^{n-j} - 1$, para $0 \leq j \leq n$. Entonces

$$A_{j+1} = \frac{3A_j + 1}{2} \quad (j < n), \quad \frac{A_j + 1}{A_0 + 1} = \left(\frac{3}{2}\right)^j.$$

La primera igualdad es una transición efectiva de la función simplificada S sobre los impares $A_0, \dots, A_{n-1}$; A_n es par. Se trata de una identidad de racha, no de una conservación de la altura h .

9.3. Congruencias finitas y sus límites

Fijemos $K \geq 1$. Si $m \equiv m' \pmod{2^K}$ y $n(m) < K$, entonces $n(m') = n(m) = n$ y

$$q(m') \equiv q(m) \pmod{2^{K-n}}.$$

No se sigue que $q(m') = q(m)$: para identificar un triángulo completo se necesita el valor exacto de q , no solo un número fijo de dígitos binarios del encabezado.

Asimismo, si $h(m) < K$, la congruencia $m \equiv m' \pmod{2^K}$ implica $h(m') = h(m) = h$ y

$$F(m') \equiv F(m) \pmod{2^{K-h}}.$$

Si $h(m) \geq K$, el módulo 2^K solo permite afirmar que $h(m') \geq K$. Por tanto, una clase finita de residuos conserva información truncada, no el futuro completo de la órbita.

9.4. Relaciones verticales y diagonales

Para las celdas $A_{q,n}(j) = q3^j2^{n-j} - 1$ valen

$$A_{q,n+1}(j) = 2A_{q,n}(j) + 1, \quad A_{q,n+1}(j+1) = 3A_{q,n}(j) + 2.$$

La primera relaciona celdas de una misma columna geométrica en filas contiguas; la segunda, celdas diagonales. Ambas son verificables sustituyendo la fórmula cerrada. No establecen por sí mismas una relación de parentesco orbital entre las celdas.

9.5. Conteos de longitudes y valoraciones

Al recorrer todos los encabezados impares en orden natural, se tiene para $r \geq 1$

$$\Pr(n(m) = r) = 2^{-r}, \quad \Pr(h(m) = r) = 2^{-r},$$

en el sentido de densidades naturales entre impares. La primera igualdad procede de $m \equiv 2^r - 1 \pmod{2^{r+1}}$; la segunda, de una única clase de impares módulo 2^{r+1} que satisface $\nu_2(3m+1) = r$. Las distribuciones marginales son iguales, pero $n(m)$ y $h(m)$ no son la misma variable. En particular, estos conteos no determinan sus frecuencias temporales en una órbita de F .

9.6. Conexiones entre triángulos

La transición entre *columnas encabezadas* se obtiene evaluando $(q(F(m)), n(F(m)))$. Para $n(m) \geq 2$ vale la regla exacta $(q, n) \mapsto (3q, n-1)$. Para $n(m) = 1$ se factoriza $F(m) + 1$ después de calcular $F(m) = \text{odd}(3q-1)$. Estas reglas describen el grafo sin identificar la diagonal dibujada con una genealogía.

9.7. Estabilidad algebraica de las figuras

Para cualquier q impar y cualquier $n \geq 1$, la fila $A_{q,n}(0), \dots, A_{q,n}(n)$ tiene n impares seguidos de un par y satisface las recurrencias de las secciones 9.2 y 9.4. Añadir filas conserva esas mismas fórmulas. Ésta es una afirmación precisa de estabilidad de la *forma algebraica*. No implica que dos órbitas distintas con encabezados congruentes en un módulo fijo tengan la misma genealogía.

9.8. Registro conjunto de datos

Se pueden registrar para cada encabezado las coordenadas y la etiqueta de su enlace como

$$D(m) = (q(m), n(m), h(m), F(m)).$$

El par (q, n) ya determina m y, por consiguiente, los otros dos componentes; el registro es redundante deliberadamente porque separa ubicación tabular y paso acelerado. No afirmamos que $D(m)$ se conserve al iterar F .

9.9. Alcance dinámico

Las fórmulas de las celdas y los conteos entre todos los encabezados no demuestran que una genealogía vuelva repetidamente a un conjunto fijo de triángulos. En particular, fijar un número finito de índices $q-1$ selecciona solo los encabezados $q2^n-1$ para esos valores de q ; ese conjunto tiene densidad natural cero entre los impares. Una afirmación de atracción orbital requiere una hipótesis y una demostración adicionales, formuladas para órbitas individuales.

9.10. Resumen

La estructura comprobada consiste en: las coordenadas únicas (q, n) de cada columna, la fórmula exacta de cada fila, sus recurrencias verticales y diagonales, y las congruencias que permiten conocer una cantidad finita de datos. Las alturas h describen otros enlaces y tienen su propia distribución entre encabezados.

Capítulo 10

Codificación de la dinámica de Collatz mediante tramos

Las tablas y los triángulos permiten codificar sin pérdida las órbitas de la función simplificada de Collatz. Las identidades locales describen enlaces, rachas y colas pares. Para obtener una conclusión global hay que controlar su composición a lo largo de una misma órbita. En este capítulo distinguimos las afirmaciones exactas de las cuestiones que siguen abiertas.

10.1. Tramos impares y tramos pares de una órbita

Los tramos de esta sección son bloques de la función simplificada S . Se distinguen del puente clásico $\mathcal{P}(m)$, definido en el capítulo 3 para la función clásica.

Definición 10.1 (Tramo impar). Sea m impar positivo con $m + 1 = 2^n q$, donde q es impar y $n \geq 1$. El *tramo impar* encabezado por m es

$$m = A_{q,n}(0) \xrightarrow{S} A_{q,n}(1) \xrightarrow{S} \cdots \xrightarrow{S} A_{q,n}(n) = q3^n - 1, \quad A_{q,n}(j) = q3^j 2^{n-j} - 1.$$

Contiene n impares consecutivos y el primer par que los sigue. Coincide con la columna de la Tabla de Impares encabezada por m y con la fila n de $T(q - 1)$.

Definición 10.2 (Tramo par). Sea $v = 2^r u$ un par positivo, con u impar y $r \geq 1$. El *tramo par* encabezado por v es

$$v \xrightarrow{S} \frac{v}{2} \xrightarrow{S} \cdots \xrightarrow{S} \frac{v}{2^r} = u.$$

Coincide con la columna de la Tabla de Pares encabezada por v . Si $v = 2^r 3^j b$, con $3 \nmid b$, ocupa un segmento de la columna j de $T(b)$, leído de abajo arriba.

Proposición 10.3 (Descomposición de una órbita). *Toda órbita positiva de S se recorre mediante tramos impares y pares alternados. Si comienza en un impar, empieza con su tramo impar; si comienza en un par, empieza con su tramo par. El término final de cada tramo es el término inicial del siguiente. Con esta identificación de los extremos compartidos, la descomposición queda determinada de manera única.*

Demostración. Desde un impar, la definición del tramo impar sigue la órbita hasta su primer par. Desde un par, las divisiones sucesivas por 2 siguen la órbita hasta su primer impar. Este proceso se repite, y cada extremo determina de forma única el tramo siguiente. $\square$

Ejemplo 10.4. Desde $m = 127$ se tiene $m + 1 = 2^7$. El tramo impar, que ocupa la fila 7 de $T(0)$, es

$$127 \rightarrow 191 \rightarrow 287 \rightarrow 431 \rightarrow 647 \rightarrow 971 \rightarrow 1457 \rightarrow 2186.$$

Le siguen el tramo par $2186 \rightarrow 1093$, el tramo impar $1093 \rightarrow 1640$ y el tramo par $1640 \rightarrow 820 \rightarrow 410 \rightarrow 205$.

Un tramo impar seguido de su tramo par realiza el salto

$$G(m) = \text{odd}(q3^n - 1) = F^n(m).$$

10.2. El grafo dinámico

Sobre los impares positivos, el operador $F(m) = (3m + 1)/2^{h(m)}$, con $h(m) = \nu_2(3m + 1)$, define el grafo $m \rightarrow F(m)$. Hay una salida por vértice. Los múltiplos impares de 3 no tienen entradas; los demás tienen infinitas entradas si se consideran todos los impares positivos. El grafo inverso se ramifica, pero llamarlo árbol global presupondría la inexistencia de otros ciclos, que aquí no se demuestra.

10.3. Perfiles y coordenadas

La órbita $m_i = F^i(m_0)$ determina los perfiles

$$h_i = \nu_2(3m_i + 1), \quad n_i = \nu_2(m_i + 1), \quad q_i = \frac{m_i + 1}{2^{n_i}}.$$

Los dos últimos valores identifican la fila que contiene la columna encabezada por m_i : $m_i = q_i 2^{n_i} - 1$. El valor h_i etiqueta el puente desde m_i hasta m_{i+1} . El índice figurativo del triángulo es $q_i - 1$, no h_i . Estos perfiles son datos que varían al iterar; no son invariantes constantes.

10.4. Frecuencias entre encabezados

Entre todos los impares positivos, las densidades de $\{m : h(m) = r\}$ y $\{m : n(m) = r\}$ son, por separado, 2^{-r} para $r \geq 1$. En particular, la mitad de los encabezados tiene $h = 1$ y la mitad tiene $n = 1$. Esas dos mitades son conjuntos diferentes. El conteo no determina qué proporción de tiempo pasa una órbita particular en cada clase, ni la proporción de tiempo que visita triángulos de índice $q - 1$ pequeño.

10.5. Rachas de crecimiento y puentes contractivos

Si $n_i \geq 2$, entonces $h_i = 1$ y

$$m_{i+1} = \frac{3m_i + 1}{2} = 3q_i 2^{n_i-1} - 1 > m_i \quad (m_i > 1).$$

La cadena de impares de una fila triangular materializa esas transiciones. El último impar de la fila tiene $n = 1$, y su paso simplificado produce un par. Para ese impar se cumple $h_i \geq 2$, por lo que $m_{i+1} < m_i$ si $m_i > 1$. Cuando $h_i \geq 5$, la contracción es al menos $F(m_i) \leq (3m_i + 1)/32$. La reducción es respecto del impar *que inicia ese puente*; no compara necesariamente el resultado con el primer impar de una racha anterior ni determina la altura siguiente.

10.6. El ciclo conocido y el alcance de las pruebas

La función simplificada tiene el ciclo $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, y el operador impar acelerado el punto fijo $F(1) = 1$, con $h(1) = 2$. La función clásica no simplificada tiene $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. La pertenencia de una órbita a este ciclo no se deduce solo de que visite muchas veces las clases $h = 1, 2$.

Como criterio suficiente, si se lograra demostrar que para *cada* impar $m > 1$ existe $N = N(m) \geq 1$ tal que $F^N(m) < m$, entonces la convergencia a 1 seguiría por inducción fuerte sobre m . Este criterio expresa con precisión la tarea global pendiente; las identidades tabulares no la resuelven por sí solas.

10.7. Ejemplo de alternancia real

La genealogía acelerada de 7 es $7 \rightarrow 11 \rightarrow 17 \rightarrow 13 \rightarrow 5 \rightarrow 1$, con valoraciones respectivas 1, 1, 2, 3, 4 antes de llegar a 1. La fila de la columna encabezada por 7 es 7, 11, 17, 26; desde 26 se lee $26 \rightarrow 13$ en la Tabla de Pares. Este ejemplo ilustra una racha de crecimiento seguida de descensos, sin establecer que toda órbita siga el mismo patrón.

10.8. Balance exacto de una órbita

Para $m_{i+1} = F(m_i)$ se tiene

$$\log \frac{m_N}{m_0} = \sum_{i=0}^{N-1} \log \left(3 + \frac{1}{m_i} \right) - (\log 2) \sum_{i=0}^{N-1} h_i.$$

En particular, hay descenso entre m_0 y m_N exactamente cuando el segundo término supera al primero. Sustituir la primera suma por $N \log 3$ es una aproximación que exige controlar las correcciones positivas $\log(1 + 1/(3m_i))$. La frecuencia de una sola altura no determina este balance.

10.9. Interpretación geométrica

El camino de encabezados (q_i, n_i) recorre una familia de triángulos. Cuando $n_i \geq 2$ sigue la regla $(q_i, n_i) \mapsto (3q_i, n_i - 1)$; cuando $n_i = 1$ se calcula la cola par y se vuelve a factorizar $m_{i+1} + 1$. Esta representación es determinista y exacta. Llamar “cuenca” o “atractor” a un conjunto de triángulos requeriría demostrar que las órbitas entran o permanecen en él bajo una condición precisa.

10.10. Relación entre los tres operadores

La función clásica aplica $m \mapsto 3m + 1$ al impar y después divide los pares por dos. La simplificada S incorpora una de esas divisiones en el paso impar. El operador F registra solamente los impares consecutivos de ambas órbitas. Las tablas corresponden a S y permiten reconstruir la dinámica clásica reinsertando el par $3m + 1$ antes de cada paso simplificado desde un impar.

10.11. Modelo global y límite lógico

El grafo de F , las tablas de S y la clasificación triangular son descripciones compatibles de la misma dinámica a distinta resolución. Determinan cada paso y muestran las rachas de crecimiento y contracción. No establecen que toda órbita llegue a 1: para ello falta un control global, como el descenso finito para cada $m > 1$ de la sección 10.5.

10.12. Resumen

La mitad de los encabezados tiene $h = 1$; las rachas de una fila triangular terminan en un par; los puentes con $h \geq 5$ contraen fuertemente el impar del que salen. Estas afirmaciones son exactas.

Capítulo 11

La familia de triángulos pares y su enlace con la familia impar

La familia impar $T(a)$ dispone en filas las rachas de la Tabla de Impares. La familia par $T(b)$ permite localizar las cadenas de la Tabla de Pares en *columnas verticales*, recorridas *de abajo arriba*. Las dos familias representan tramos de la función simplificada S mediante reglas de lectura distintas.

11.1. Motivación

Toda cadena que empieza en un par v y divide sucesivamente por 2 termina en su parte impar. La Tabla de Pares organiza esas cadenas por su valor inicial. El Apéndice E muestra un arreglo triangular que permite reunir cadenas con la misma parte impar libre de factores de 3.

11.2. Definición de la familia par

Sea b un impar positivo con $3 \nmid b$; equivalentemente, $b \equiv 1$ o 5 (mód 6). Definimos el triángulo par $T(b)$ por

$$B_{b,n,j} = b3^j 2^{n-j}, \quad n \geq 0, \quad 0 \leq j \leq n.$$

La fila n contiene $n + 1$ entradas. Su columna geométrica j contiene, para $n = j, j + 1, \dots$, los números

$$b3^j, \quad 2b3^j, \quad 4b3^j, \quad \dots$$

de arriba abajo. El primero es impar; los siguientes son pares. Una cadena par empieza en cualquiera de los términos pares y se lee de abajo arriba, dividiendo sucesivamente por 2 hasta $b3^j$.

11.2.1. Ejemplo $T(1)$

Las filas iniciales del Apéndice E son

$$\begin{array}{l|llll} n=0 & 1 & & & \\ n=1 & 2 & 3 & & \\ n=2 & 4 & 6 & 9 & \\ n=3 & 8 & 12 & 18 & 27. \end{array}$$

La fila 8, 12, 18, 27 no es un tramo par. En cambio, la primera columna da $8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ leída hacia arriba; la segunda da $12 \rightarrow 6 \rightarrow 3$ y la tercera $18 \rightarrow 9$.

11.3. Correspondencia con la Tabla de Pares

Todo par positivo v tiene una descomposición única

$$v = 2^r 3^j b, \quad r \geq 1, \quad j \geq 0, \quad b \text{ impar}, \quad 3 \nmid b.$$

Se ubica en la celda de coordenadas $(b, n, j) = (b, r + j, j)$ de $T(b)$. Su columna de la Tabla de Pares es el segmento vertical

$$B_{b, r+j, j} \rightarrow B_{b, r+j-1, j} \rightarrow \cdots \rightarrow B_{b, j, j} = 3^j b.$$

Cada par aparece como celda en un único triángulo par, aunque los tramos de la Tabla de Pares correspondientes a valores $v, 2v, 4v, \dots$ son segmentos anidados de una misma columna vertical.

11.4. Encuentro de las dos familias

Una fila n de $T(q-1)$, con q impar, termina en el par $v = q3^n - 1$. Para $n \geq 1$ se tiene $v \equiv 2 \pmod{3}$, de modo que $3 \nmid v$. Escribimos $v = 2^r b$, con $r = \nu_2(v) \geq 1$ y b impar no divisible por 3. Entonces v se localiza en la *primera columna* ($j = 0$) de $T(b)$, en la fila r , y la cadena $v \rightarrow \cdots \rightarrow b$ se lee de abajo arriba. El impar b encabeza la próxima columna de la Tabla de Impares. Esta es una regla exacta de enlace entre las dos familias.

11.5. Ejemplo completo de enlace

La fila $n = 3$ de $T(0)$ es $7 \rightarrow 11 \rightarrow 17 \rightarrow 26$. El par terminal es $26 = 2 \cdot 13$, situado en la columna $j = 0$ de $T(13)$; leyéndola hacia arriba se obtiene $26 \rightarrow 13$. La columna impar encabezada por 13 es $13 \rightarrow 20$, y a continuación $20 \rightarrow 10 \rightarrow 5$ se lee en la columna primera de $T(5)$, comenzando en su fila $r = 2$. La sucesión enlaza filas horizontales impares con segmentos verticales pares.

11.6. La extracción de la parte impar y el operador F

Para $1 \leq s \leq h(m)$,

$$F_s(m) = \text{odd} \left(\frac{3m+1}{2^s} \right),$$

se obtiene siempre $F_s(m) = F(m)$: quitar primero s factores de 2 y después los restantes no altera la parte impar. Si $s > h(m)$, el cociente no es entero. Así, esta fórmula no define operadores dinámicos distintos de F sin añadir otra regla genuinamente nueva.

11.7. Relación estructural entre las familias

La correspondencia comprobada es la siguiente: una fila de la familia impar se lee de izquierda a derecha hasta su par terminal; desde allí se recorre un segmento de la primera columna de un triángulo par hacia arriba; el impar de llegada encabeza otra fila de la familia impar. Se trata de una codificación exacta de S . No presupone una simetría entre diagonales o genealogías no demostrada.

11.8. Alcance de la representación

Cada tabla por sí misma contiene todos los bloques de su paridad. La descomposición única de $m+1$ asigna cada columna impar a una fila impar; la descomposición única de un par $v = 2^r 3^j b$ asigna cada par a una celda de la familia par. Las reglas del apartado 11.4 especifican los enlaces entre ambas representaciones.

11.9. Pares divisibles por tres

Las columnas $j \geq 1$ de $T(b)$ contienen pares divisibles por 3 y acaban en un impar también divisible por 3. Estas columnas representan correctamente las cadenas de la Tabla de Pares cuando la órbita se inicia en uno de esos pares. En cambio, el par que sale de una fila impar tiene siempre la forma $q3^n - 1$ con $n \geq 1$, por lo que no es divisible por 3 y entra necesariamente en una columna $j = 0$. Esta diferencia explica por qué las columnas adicionales de los triángulos pares forman parte de la tabla completa aunque no sean puntos de entrada directa desde una fila impar.

11.10. Resumen

En $T(a)$ las rachas impares ocupan filas horizontales. En $T(b)$ las cadenas pares ocupan segmentos de columnas verticales leídos de abajo arriba. El parámetro $b \equiv 1, 5 \pmod{6}$ es la parte impar libre de factores de 3 del número colocado; su unicidad evita duplicaciones de celdas entre los triángulos pares.

Capítulo 12

Cálculos modulares y análisis de trayectorias concretas

Las fórmulas de las tablas permiten calcular con exactitud longitudes de rachas, colas pares y enlaces de órbitas concretas. Una congruencia finita aporta información hasta una precisión determinada; una identidad local no anticipa por sí sola el futuro de toda la órbita.

12.1. Cálculo modular de valoraciones

Sea $h(m) = \nu_2(3m + 1)$ para un impar m . Conocer m módulo 2^K determina $3m + 1$ módulo 2^K . Si este residuo no es cero, determina exactamente $h(m) < K$. Si es cero, solo demuestra $h(m) \geq K$. Por ejemplo, $5 \equiv 13 \pmod{8}$, pero $h(5) = 4$ y $h(13) = 3$: la clase módulo 8 solo permite afirmar $h \geq 3$.

La longitud de la columna impar se calcula de manera distinta: $n(m) = \nu_2(m + 1)$. Si $m + 1 \equiv 0 \pmod{2^K}$, también puede ser necesario aumentar el módulo para conocer $n(m)$ exactamente.

12.2. Crecimiento, picos y contracción

Hay que especificar qué pico se mide. En la función clásica, el paso desde un impar m alcanza el par visible $3m + 1$; este valor puede ser grande con $h(m) = 1$. En el operador acelerado, el siguiente impar es $F(m) = (3m + 1)/2^{h(m)}$: si $h(m) = 1$ crece respecto a $m > 1$, y si $h(m) \geq 2$ decrece.

En la Tabla de Impares, una columna de longitud $n(m)$ muestra una racha de $n(m)$ pasos simplificados hasta un par, con término final $q3^{n(m)} - 1$, donde $m + 1 = 2^{n(m)}q$. La longitud de la racha no es la altura $h(m)$ del primer puente. No existe un umbral $h \geq 5$ que identifique por sí solo todos los máximos de la órbita.

12.3. Colas pares largas

Si $h(m) \geq 5$, el siguiente impar satisface $F(m) \leq (3m+1)/32 < m$ para $m > 1$. Esto certifica un descenso en ese enlace. La valoración del enlace siguiente $h(F(m))$ se calcula separadamente; puede ser también grande. Por ejemplo, $565 \xrightarrow{h=5} 53 \xrightarrow{h=5} 5$. La frase “descenso tras un puente alto” debe referirse al valor numérico de $F(m)$ frente a m , no a un descenso obligatorio de la próxima altura 2-ádica.

12.4. Perfiles finitos

Un segmento de la órbita acelerada se determina por su impar inicial m_0 y sus exponentes sucesivos $h_0, \dots, h_{N-1}$, mediante

$$m_{i+1} = \frac{3m_i + 1}{2^{h_i}} \quad (0 \leq i < N).$$

El perfil por sí solo no debe describirse como una “excursión ascendente” sin calcular o acotar el balance de los factores. La identidad exacta es

$$\log \frac{m_N}{m_0} = \sum_{i=0}^{N-1} \log \left(3 + \frac{1}{m_i} \right) - (\log 2) \sum_{i=0}^{N-1} h_i.$$

12.5. Reconstrucción sin listar todos los pares

La secuencia de impares $m_i = F^i(m_0)$ y las valoraciones h_i reconstruyen todos los pasos simplificados: después de m_i aparecen $2^{h_i-1}m_{i+1}, 2^{h_i-2}m_{i+1}, \dots, m_{i+1}$. Para reconstruir la órbita clásica se antepone $3m_i + 1 = 2^{h_i}m_{i+1}$ antes de esas divisiones. Esta compresión ahorra escribir los pares intermedios, pero no elimina la necesidad de calcular los enlaces impares efectivamente visitados.

12.6. Distribución entre encabezados

Entre los impares positivos, la densidad de $h(m) = k$ es 2^{-k} , $k \geq 1$. Respecto de todos los enteros positivos, la densidad de los impares con $h(m) = k$ es $2^{-(k+1)}$. Por ello, entre encabezados impares, la mitad tiene $h = 1$, una cuarta parte $h = 2$ y la proporción con $h \geq 5$ es $1/16$. Son proporciones espaciales exactas; no fijan la duración ni las frecuencias de visitas de una órbita particular.

12.7. Patrones observados y alcance estadístico

En una muestra finita de órbitas se pueden registrar rachas crecientes, colas contractivas y la frecuencia de cada valoración h . Toda afirmación de frecuencia debe especificar la muestra de encabezados, el tiempo de observación y cómo se cuentan las repeticiones. Una frecuencia

empírica obtenida así no se identifica automáticamente con la densidad natural entre todos los impares ni constituye una prueba de convergencia universal.

12.8. Una trayectoria calculada

12.8.1. La órbita que comienza en 27

Su prefijo acelerado es

$$27 \xrightarrow{1} 41 \xrightarrow{2} 31 \xrightarrow{1} 47 \xrightarrow{1} 71 \xrightarrow{1} 107 \xrightarrow{1} 161 \xrightarrow{2} 121 \xrightarrow{2} 91.$$

Los rótulos son los valores de h . El crecimiento inicial se debe principalmente a enlaces con $h = 1$; una cola con h alto contrae cuando aparece. El ejemplo no prueba que las órbitas de otros valores sigan el mismo patrón.

12.8.2. Encabezados de Mersenne

Para $m = 2^k - 1$, $k \geq 1$, se tiene $n(m) = k$ y la fila correspondiente de $T(0)$ es

$$2^k - 1, 3 \cdot 2^{k-1} - 1, \dots, 3^k - 1.$$

El último término es el primer par de la racha. Su parte impar se obtiene dividiendo $3^k - 1$ por $2^{\nu_2(3^k - 1)}$. Para $k \geq 2$, el exponente del *primer* puente de m es $h(m) = 1$, mientras la racha tiene longitud k . Esto muestra concretamente la diferencia entre ambas variables.

12.9. Coste de las representaciones

Una fila triangular genera una racha de n pasos mediante una fórmula cerrada, y un puente acelerado agrupa h divisiones por dos. El ahorro de cálculo depende de la órbita y de la operación solicitada; para continuarla es preciso determinar cada nuevo enlace

12.10. Resumen

Las tablas predicen exactamente las rachas una vez conocido su encabezado y permiten reconstruir una órbita a diferente resolución. Los residuos módulo 2^K aportan información truncada.

Capítulo 13

Perspectiva unificada: Collatz como sistema 2-ádico estratificado

La representación por tablas tiene dos escalas complementarias: el enlace entre impares $m \mapsto F(m)$ y el recorrido de una racha impar completa, seguido por su cola par. Los triángulos ordenan las columnas de ambas tablas y permiten expresar un salto exacto entre rachas. Esta síntesis mantiene separados los índices de los dibujos y las valoraciones de los puentes.

13.1. Tres operadores y un itinerario

La función clásica aplica $3m + 1$ al impar y divide los pares por 2. La simplificada S incorpora la primera división por 2 en el paso impar. El operador $F(m) = (3m + 1)/2^{h(m)}$ registra los impares consecutivos, con $h(m) = \nu_2(3m + 1)$. Todos describen las mismas órbitas en resoluciones diferentes. Para consultar las tablas se usan los pasos de S .

13.2. Dos clasificaciones aritméticas

La altura del puente define los conjuntos

$$E_r = \{m \text{ impar} : h(m) = r\}, \quad r \geq 1.$$

Separadamente, cada encabezado impar m se escribe de manera única $m = q2^n - 1$, con q impar y $n \geq 1$, y su columna ocupa la fila n de $T(q - 1)$. En general

$$E_r \neq T(q - 1).$$

El lado izquierdo es una clase de valoraciones de puentes; el derecho es un arreglo de rachas indexado por la parte impar de $m + 1$.

13.3. Transición de encabezados

Al seguir enlaces de F , el encabezado $m = q2^n - 1$ pasa, para $n \geq 2$, a

$$F(m) = 3q2^{n-1} - 1, \quad (q, n) \mapsto (3q, n - 1).$$

Cuando $n = 1$, el primer paso simplificado produce el par $3q - 1$; se divide hasta su parte impar $F(m) = \text{odd}(3q - 1)$. Este caso cierra la racha de la fila correspondiente. Las reglas son deterministas y no afirman que el índice $q - 1$ disminuya.

13.4. Lectura por las dos familias de triángulos

La fila n de $T(q - 1)$ es

$$q2^n - 1, q3, 2^{n-1} - 1, \dots, q3^n - 1.$$

Se lee de izquierda a derecha. El par terminal $v = q3^n - 1$ entra en la primera columna de un triángulo par $T(b)$, con $b = \text{odd}(v)$. Si $v = 2^r b$, su segmento de columna se lee de abajo arriba, $v \rightarrow v/2 \rightarrow \dots \rightarrow b$. Así se llega al encabezado de una nueva columna impar.

13.5. Dinámica horizontal y vertical

La lectura horizontal de una fila impar aplica $S(x) = (3x + 1)/2$ mientras sus términos son impares. La lectura vertical de un segmento del triángulo par aplica $S(v) = v/2$ mientras los términos son pares. Estas direcciones pertenecen al dibujo de las tablas; no deben confundirse con una deriva monótona del valor numérico a lo largo de toda la órbita.

13.6. Puentes y resolución acelerada

Cada transición entre impares consecutivos verifica $3m + 1 = 2^{h(m)}F(m)$. Los enlaces con $h = 1$ aparecen como pasos entre impares dentro de una fila. El puente del último impar de esa fila pasa por su par terminal y las divisiones de la Tabla de Pares. El puente permite recuperar el exponente del enlace, pero la fila se clasifica por $m + 1 = 2^n q$.

13.7. Frecuencias y alcance

Entre todos los encabezados impares, la densidad de E_r es 2^{-r} ; la densidad de encabezados con $n(m) = r$ también es 2^{-r} . Ambos son conteos exactos de clases modulares. Para una órbita individual, una afirmación de frecuencia o retorno exige un argumento adicional. La escasez espacial de una clase no excluye que una órbita la visite muchas veces.

13.8. El salto entre rachas completas

Definimos, para m impar positivo y $m + 1 = 2^n q$ con q impar,

$$G(m) = \text{odd}(q3^n - 1).$$

Esta aplicación toma el par terminal de la columna impar encabezada por m , recorre su columna de la Tabla de Pares y devuelve el próximo impar. La fila contiene n entradas impares, de modo que

$$G(m) = F^n(m), \quad n = \nu_2(m + 1).$$

Por tanto, G es un salto inducido de longitud variable entre encabezados de rachas sucesivas. No es en general una sola aplicación de F . En particular, $G(7) = 13$ mientras que $F(7) = 11$.

13.9. Convergencia: equivalencia y límite

Como cada salto de G consta de un número finito y positivo de enlaces de F , y $F(1) = G(1) = 1$, se tiene la equivalencia

$$(\forall m \text{ impar}, F^j(m) = 1 \text{ para algún } j) \iff (\forall m \text{ impar}, G^k(m) = 1 \text{ para algún } k).$$

En efecto, llegar a 1 bajo G implica llegar bajo F ; si una órbita de F llega a 1, los saltos positivos sucesivos de G terminan alcanzando o sobrepasando ese índice, y después permanecen en 1. Esta equivalencia sitúa la conjetura en las coordenadas de las dos tablas, pero no la demuestra: aún falta controlar globalmente las iteraciones de G o de F .

13.10. Geometría de la codificación

La familia $\{T(0), T(2), T(4), \dots\}$ reúne todas las filas de la Tabla de Impares; la familia par $\{T(b) : b \equiv 1, 5 \pmod{6}\}$ localiza cada par mediante $v = 2^r 3^j b$. La entrada desde una fila impar pasa por una columna $j = 0$ del triángulo par correspondiente. Esto proporciona una codificación bidireccional exacta de los bloques de S , sin presuponer una pendiente global descendente.

13.11. Resumen

Las dos familias de triángulos reorganizan las tablas y definen el salto exacto $G(m) = F^{\nu_2(m+1)}(m)$ entre rachas. La clasificación figurativa por q y la clasificación de puentes por $h(m)$ son distintas.

Capítulo 14

Conclusiones generales y líneas futuras de desarrollo

Los resultados aritméticos de las tablas y los triángulos se distinguen de las cuestiones dinámicas todavía abiertas. La aportación del marco es una codificación exacta de rachas impares y cadenas pares de la función simplificada de Collatz, junto con reglas explícitas para pasar entre ambas familias.

14.1. Resultados principales

14.1.1. Enlaces impares y puentes

Todo impar m posee un siguiente impar $F(m)$ determinado por $3m + 1 = 2^{h(m)}F(m)$, donde $h(m) = \nu_2(3m + 1)$. Esta identidad etiqueta un enlace de la órbita acelerada y permite reconstruir los pares omitidos.

14.1.2. Tabla de Impares y familia $T(a)$

Cada columna impar encabezada por $m = q2^n - 1$ coincide con la fila n del triángulo figurativo $T(q - 1)$:

$$q2^n - 1, q3 \cdot 2^{n-1} - 1, \dots, q3^n - 1.$$

La fila se lee de izquierda a derecha y termina en un par. La factorización única de $m + 1$ demuestra que cada columna de la Tabla de Impares corresponde a una fila única.

14.1.3. Tabla de Pares y familia $T(b)$

Todo par v tiene una factorización única $v = 2^r 3^j b$, donde $r \geq 1$, $j \geq 0$ y b es impar no divisible por 3. Se sitúa en la celda $B_{b,r+j,j}$ del triángulo par $T(b)$. Su tramo de divisiones por dos se lee en un segmento de la columna j de abajo arriba, hasta el impar $3^j b$.

14.1.4. Reglas de enlace entre familias

El par terminal de una fila impar es $v = q3^n - 1$, que no es divisible por 3. Su tramo de la Tabla de Pares se sitúa, por ello, en la primera columna de un triángulo par $T(b)$, con $b = \text{odd}(v)$. Este impar encabeza la siguiente columna impar. El itinerario se expresa también mediante el salto $G(m) = \text{odd}(q3^n - 1) = F^n(m)$.

14.1.5. Dos valoraciones con funciones distintas

La longitud de la racha impar es $n(m) = \nu_2(m + 1)$. El exponente de su primer puente acelerado es $h(m) = \nu_2(3m + 1)$. Entre todos los encabezados impares, cada una de estas variables tiene distribución 2^{-r} en el valor $r \geq 1$, pero clasifican objetos distintos y no fijan las frecuencias en una órbita individual.

14.2. Límites demostrativos

Las fórmulas de las tablas no demuestran que toda órbita llegue a 1, que vuelva a un conjunto fijo de triángulos ni que la frecuencia temporal de sus valoraciones coincida con las densidades entre encabezados. El criterio de descenso finito para cada impar $m > 1$ bastaría para probar Collatz, pero no se obtiene de las identidades locales. La equivalencia de convergencia entre F y G reformula la cuestión sin resolverla.

14.3. Utilidad del marco

Las tablas distinguen claramente las rachas de impares y las colas de pares; los triángulos facilitan su localización exacta y permiten comparar familias de encabezados mediante fórmulas cerradas. Las recurrencias entre celdas ofrecen controles algebraicos de los dibujos y de los ejemplos.

14.4. Líneas futuras de investigación

14.4.1. Transiciones del salto G

Estudiar las coordenadas $(q(G(m)), n(G(m)))$ en términos de $(q(m), n(m))$, en particular la valoración de $q3^n - 1$ y la posición de su parte impar.

14.4.2. Estadísticas a lo largo de órbitas

Separar los recuentos exactos entre encabezados de los datos obtenidos sobre órbitas individuales. Toda hipótesis estadística debe precisar la muestra, la escala temporal y la magnitud observada.

14.4.3. Comparación entre rachas

Buscar condiciones comprobables bajo las cuales una racha completa seguida de su cola par produce un nuevo encabezado menor que el inicial. Una condición universal de descenso finito resolvería la conjetura y debe tratarse como tal.

14.4.4. Extensiones aritméticas

Preguntar qué identidades de filas y columnas sobreviven en mapas del tipo $(dm + c)/2$ para parámetros concretos. La similitud de fórmulas no garantiza que las conclusiones globales de dos mapas sean iguales.

14.4.5. Grafo de encabezados

Analizar el grafo determinista de coordenadas (q, n) y la localización de cada flecha en las dos tablas, distinguiendo las aristas directas de sus ramas inversas.

14.4.6. Edición y comparación de representaciones

Mantener en figuras y ejemplos una notación distinta para el índice triangular $q - 1$, la longitud $n(m)$ y la altura del puente $h(m)$. Comparar así las rachas de la función simplificada con los puentes clásicos del operador impar acelerado.

14.5. Conclusión final

La familia impar organiza horizontalmente las columnas de rachas; la familia par organiza verticalmente las cadenas de divisiones. Su acoplamiento proporciona una descripción exacta de la función simplificada y un salto inducido entre rachas. El valor del enfoque reside en esta estructura verificable y en las preguntas concretas que permite formular. La convergencia universal continúa abierta.

Epílogo

Las tablas de impares y pares ofrecen dos lecturas complementarias de la función simplificada de Collatz. Sus columnas se reordenan en dos familias de triángulos: las rachas impares aparecen en filas horizontales y las cadenas pares en segmentos verticales leídos de abajo arriba. Las fórmulas de estas figuras permiten verificar cada entrada y reconstruir los enlaces entre rachas sucesivas.

El salto $G(m) = F^{\nu_2(m+1)}(m)$ recoge el recorrido de una fila impar completa y su cola par. Esa identidad conecta los dibujos con el operador impar acelerado, sin resolver la cuestión de si toda órbita llega a 1. La aportación de esta descripción es un lenguaje preciso para formular y comprobar preguntas sobre rachas, puentes y recorridos entre las dos tablas.

Apéndice A

Terminología y notación

1. Funciones de Collatz. La función clásica envía un impar m a $3m + 1$ y un par v a $v/2$. La función simplificada S envía el impar m a $(3m + 1)/2$ y el par v a $v/2$. Sobre impares se define el operador acelerado

$$F(m) = \frac{3m + 1}{2^{h(m)}}, \quad h(m) = \nu_2(3m + 1).$$

2. Tramo impar (columna de la Tabla de Impares). Para el encabezado impar m , ponemos $n(m) = \nu_2(m + 1)$ y $q(m) = (m + 1)/2^{n(m)}$. La columna es

$$A_{q,n}(j) = q3^j2^{n-j} - 1, \quad 0 \leq j \leq n.$$

Se lee de arriba abajo en la tabla: consta de n impares consecutivos bajo S y su primer par final. En el triángulo $T(q - 1)$ ocupa la fila n , leída de izquierda a derecha.

3. Tramo par (columna de la Tabla de Pares). Para un encabezado par $v = 2^r u$, con u impar y $r \geq 1$, la columna es $v, v/2, \dots, v/2^r = u$. Se lee de arriba abajo en la tabla. Si $v = 2^r 3^j b$ con $3 \nmid b$, ocupa un segmento de columna del triángulo par $T(b)$, leído de abajo arriba.

4. Puente clásico, puente 2-ádico y genealogía acelerada. El puente clásico del impar m es la sucesión $\mathcal{P}(m) = (m, 3m + 1, (3m + 1)/2, \dots, F(m))$ de la función clásica. Su identidad asociada, el puente 2-ádico, es $3m + 1 = 2^{h(m)} F(m)$. Su genealogía directa es $m, F(m), F^2(m), \dots$. Una columna completa de la Tabla de Impares puede contener varios enlaces consecutivos de esa genealogía.

5. Triángulo de la familia impar. Para q impar positivo, $T(q - 1)$ contiene en su fila $n \geq 1$ la columna impar $A_{q,n}(0), \dots, A_{q,n}(n)$, leída de izquierda a derecha. La fila inicial aislada $q - 1$ puede incluirse como convención gráfica. El índice $q - 1$ no es la altura $h(m)$ del puente.

6. Triángulo de la familia par. Para b impar con $3 \nmid b$, $T(b)$ contiene las celdas

$$B_{b,n,j} = b3^j 2^{n-j}, \quad 0 \leq j \leq n.$$

Una columna geométrica fija j ; cada tramo par que se inicia en una de sus celdas pares se lee de abajo arriba hasta la celda impar $b3^j$ de la fila $n = j$. Las letras a y b en $T(a)$ y $T(b)$ nombran familias figurativas diferentes.

7. Estrato de valoración. Para $r \geq 1$, E_r es el conjunto de encabezados impares con $h(m) = r$. No se identifica con un triángulo figurativo: $E_r \neq T(q-1)$ en general.

8. Salto entre rachas. Si $m+1 = 2^n q$, la fila impar termina en $v = q3^n - 1$. Después de dividir ese par hasta su parte impar se obtiene

$$G(m) = \text{odd}(q3^n - 1) = F^n(m).$$

El salto G recorre una racha completa, mientras que F registra cada enlace entre impares consecutivos.

Tabla de Impares

[illegible]

52

Apéndice C

Tabla de Pares

La Figura C.1 muestra la Tabla de Pares de S . Su fila $n = 0$ enumera todos los encabezados pares $2, 4, 6, 8, \dots$. Si $v = 2^r u$ con u impar, la columna de v contiene $v, v/2, \dots, v/2^r = u$. Por ejemplo, la columna de 8 es $8, 4, 2, 1$. En la tabla se lee de arriba abajo; en un triángulo par $T(b)$, el mismo tramo es un segmento de columna que se lee de abajo arriba. La condición $b \equiv 1, 5 \pmod{6}$ se refiere al parámetro de la familia de triángulos pares, no a los encabezados de esta tabla.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	...																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
n																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											</

Figura C.1: Tabla de Pares de S . La columna encabezada por cada par v contiene sus divisiones sucesivas por 2 hasta alcanzar el primer impar.

Apéndice D

Triángulos elementales $T(0)$ y $T(4)$

Los triángulos impares disponen en filas las columnas de la Tabla de Impares. Si $m + 1 = 2^n q$, con q impar y $n \geq 1$, la columna encabezada por m se coloca en la fila n de $T(q - 1)$ y contiene

$$q2^n - 1, q3 \cdot 2^{n-1} - 1, \dots, q3^n - 1.$$

El último término es par. Los índices 0 y 4 de las figuras siguientes corresponden a $q = 1$ y $q = 5$; no significan que $\nu_2(3m + 1)$ valga respectivamente 0 o 4. Las entradas aisladas de sus filas iniciales son 0 y 4 por convención gráfica.

Triángulo $T(0)$

n	k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
0		0										
1		1	2									
2		3	5	8								
3		7	11	17	26							
4		15	23	35	53	80						
5		31	47	71	107	161	242					
6		63	95	143	215	323	485	728				
7		127	191	287	431	647	971	1457	2186			
8		255	383	575	863	1295	1943	2915	4373	6560		
9		511	767	1151	1727	2591	3887	5831	8747	13121	19682	
...		...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Figura D.1: Triángulo impar $T(0)$, correspondiente a $q = 1$. Para $n \geq 1$, la fila n reproduce de izquierda a derecha la columna de la Tabla de Impares encabezada por $2^n - 1$ y termina en el par $3^n - 1$.

Triángulo $T(4)$

n	k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
0		4										
1		9	14									
2		19	29	44								
3		39	59	89	134							
4		79	119	179	269	404						
5		159	239	359	539	809	1214					
6		319	479	719	1079	1619	2429	3644				
7		639	959	1439	2159	3239	4859	7289	10934			
8		1279	1919	2879	4319	6479	9719	14579	21869	32804		
9		2559	3839	5759	8639	12959	19439	29159	43739	65609	98414	
...		...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Figura D.2: Triángulo impar $T(4)$, correspondiente a $q = 5$. Para $n \geq 1$, la fila n reproduce, de izquierda a derecha, la columna de la Tabla de Impares encabezada por $5 \cdot 2^n - 1$ y termina en el par $5 \cdot 3^n - 1$.

Apéndice E

Triángulo elemental $T(b)$

Para b impar positivo no divisible por 3, el triángulo par $T(b)$ contiene en fila n y columna j (rotulada $k = j + 1$ en la figura) la entrada

$$B_{b,n,j} = b3^j2^{n-j}, \quad 0 \leq j \leq n.$$

La condición $3 \nmid b$ equivale a $b \equiv 1$ o 5 (mód 6) y evita duplicar celdas entre triángulos: cada entero positivo v se factoriza de modo único como 2^r3^jb , con $3 \nmid b$. Para los pares, $r \geq 1$. La cadena de la Tabla de Pares encabezada por v ocupa un segmento de la columna j de $T(b)$ y se lee *de abajo arriba*, hasta el impar 3^jb . Por ejemplo, la columna primera de $T(1)$ contiene $1, 2, 4, 8, \dots$ de arriba abajo, y da el tramo $8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ al leer el segmento pertinente al revés.

Triángulo $T(1)$

n	k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
0		1										
1		2	3									
2		4	6	9								
3		8	12	18	27							
4		16	24	36	54	81						
5		32	48	72	108	162	243					
6		64	96	144	216	324	486	729				
7		128	192	288	432	648	972	1458	2187			
8		256	384	576	864	1296	1944	2916	4374	6561		
9		512	768	1152	1728	2592	3888	5832	8748	13122	19683	
...		...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Figura E.1: Triángulo par $T(1)$. Los tramos de la Tabla de Pares ocupan segmentos de columnas verticales que se leen de abajo arriba. Por ejemplo, $12 \rightarrow 6 \rightarrow 3$ ocupa un segmento de la segunda columna.

Apéndice F

La trayectoria del número 127 en los triángulos

Para $m = 127$, calculamos en cada racha $m + 1 = 2^n q$, el par de salida $v = q3^n - 1$ y el siguiente encabezado impar $G(m) = \text{odd}(v)$. La sucesión de saltos entre rachas queda registrada sin omitir el par de salida:

m	q	n	v	$G(m)$
127	1	7	2186	1093
1093	547	1	1640	205
205	103	1	308	77
77	39	1	116	29
29	15	1	44	11
11	3	2	26	13
13	7	1	20	5
5	3	1	8	1

En la primera etapa, la fila $n = 7$ de $T(0)$ se lee horizontalmente desde 127 hasta el par 2186; después, $2186 \rightarrow 1093$ es el segmento correspondiente de la Tabla de Pares. Las filas siguientes pertenecen a los triángulos impares de índices $q - 1 = 546, 102, 38, 14, 2, 6, 2$. No forman un descenso monótono de los índices: después de $T(2)$ aparece $T(6)$.

En la Figura F.1 cada tramo impar se dibuja en el triángulo de *índice reducido*. Si $q = 3^i q'$ con $3 \nmid q'$, el tramo impar encabezado por $m = q2^n - 1$ es el final de la fila $n + i$ de $T(q' - 1)$, a partir de su columna $j = i$:

$$q' \cdot 3^j \cdot 2^{n+i-j} - 1, \quad i \leq j \leq n + i.$$

En efecto, para $j = i$ se obtiene $q'3^i2^n - 1 = q2^n - 1 = m$. Así, 77 ($q = 39 = 3 \cdot 13$) aparece en la fila 2 de $T(12)$; 29 ($q = 15 = 3 \cdot 5$) en la fila 2 de $T(4)$; 11 y 5 ($q = 3$) en las filas 3 y 2 de $T(0)$. Cuando $3 \nmid q$ ambos criterios coinciden. Con el índice reducido, la familia impar solo necesita los triángulos $T(q' - 1)$ con $3 \nmid q'$, en paralelo con la condición $3 \nmid b$ de la familia

par.

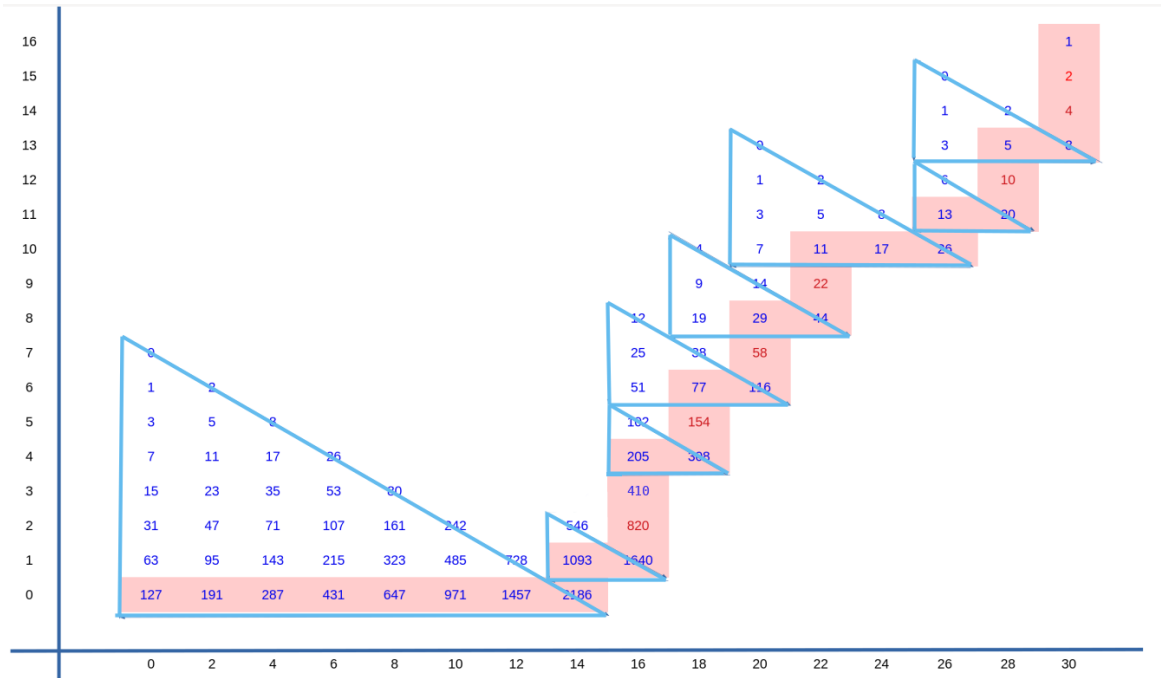


Figura F.1: Recorrido tabular de 127, con rachas impares horizontales y divisiones pares verticales. Cada tramo impar aparece en el triángulo de índice reducido $q' - 1$, donde q' es la parte de q no divisible por 3.

Bibliografía

- [1] J. C. Lagarias, The $3x + 1$ problem and its generalizations, *Amer. Math. Monthly* **92** (1985), 3–23.
- [2] R. Terras, A stopping time problem on the positive integers, *Acta Arith.* **30** (1976), 241–252.