

El juego de Collatz en el sentido de Conway

Valores de Grundy locales y terminación global

Miguel Cerdá Bennassar

Septiembre de 2026

Resumen

Conway mostró que los números pueden entenderse como juegos. Este escrito plantea la pregunta inversa para el modelo material de la iteración de Collatz: ¿qué variantes del juego de canicas son juegos en el sentido de Conway, y qué dice de ellos su teoría? Sin elección, el juego asociado a n es un juego de Conway si y solo si la órbita de n llega a 1, y su valor es 0 o $*$ según la paridad del número de pasos. Con varios recipientes la elección es ilusoria. Se introduce entonces una variante con elección real, el *juego con atajo*, en la que desde un estado impar se puede ir a $3n + 1$ o directamente a $(3n + 1)/2$. El resultado principal (Teorema 3.3) da su valor de Grundy en forma cerrada: para n par no potencia de 2 depende de la paridad del número de ceros binarios finales, y para $n > 1$ impar de la paridad del número de unos binarios finales; las potencias de 2 se tratan aparte. El valor es, por tanto, local, mientras que la finitud depende de la órbita completa. La misma fórmula define, sin hipótesis de terminación, la única solución global de las ecuaciones mex con condición terminal en 1. La finitud de todos los juegos de la familia equivale a la conjetura de Collatz. Se juega de forma perfecta sin conocer las órbitas, siempre que terminen.

1. Introducción

En el modelo material de la iteración de Collatz, un recipiente contiene n canicas. Si n es par se retira la mitad; si n es impar se añaden $2n + 1$, de modo que el contenido pasa a ser $3n + 1$. La partida se detiene cuando queda una canica. Escribimos C para la función de Collatz, $T(n) = (3n + 1)/2$ para n impar, y $K(n)$ para el número de pasos de C hasta llegar a 1, cuando existe.

En la teoría de Conway [1, 2], un juego es un par de conjuntos de opciones, uno para cada jugador, cuyas partidas terminan siempre; en juego normal pierde quien no puede mover. Un juego es *imparcial* si ambos jugadores tienen las mismas opciones. Por el teorema de Sprague–Grundy, todo juego imparcial finito en juego normal equivale a un montón de Nim $*g$, con

$$g(G) = \text{mex}\{g(G') : G' \text{ opción de } G\},$$

donde $\text{mex } S$ es el menor natural que no está en S . El segundo jugador gana si y solo si $g(G) = 0$, y el valor de una suma disjunta es la suma Nim (XOR) de los valores. Las igualdades entre juegos se entienden como equivalencias de valores, no como identidades de sus árboles de opciones.

En el juego de canicas tal como se describe habitualmente nadie elige: es un proceso de cero jugadores. Para estudiar este proceso como juego introducimos jugadores y, después, elecciones que puedan influir en el resultado. Lo hacemos en dos pasos.

2. El juego sin elección

Definición 2.1. El *juego sin elección* G_n se juega sobre un recipiente con n canicas. Los dos jugadores se turnan aplicando la regla de Collatz; la posición 1 no tiene opciones. Pierde quien no puede mover.

Proposición 2.2. G_n es un juego finito si y solo si la órbita de n llega a 1. En tal caso G_n tiene exactamente una partida, de longitud $K(n)$, y

$$G_n = \begin{cases} 0, & K(n) \text{ par}, \\ *, & K(n) \text{ impar}. \end{cases}$$

Demostración. Cada posición distinta de 1 tiene exactamente una opción, $C(m)$, así que la única partida recorre la órbita de n y termina si y solo si alcanza 1. Un juego cuya única partida tiene longitud K vale 0 si K es par (el segundo jugador gana, también cuando $K = 0$) y $*$ si es impar. $\square$

Observación 2.3 (Tablas). Si ampliamos el marco permitiendo partidas infinitas y adoptamos la convención de declararlas tablas, como en la teoría de juegos con bucles de [2], una órbita que entrara en un ciclo no trivial o divergiera produciría una partida infinita en G_n . La conjetura de Collatz equivale, pues, a que *ningún recipiente produce tablas*.

Proposición 2.4 (Sumas sin elección real). *Consideremos varios recipientes con $n_1, \dots, n_r$ canicas cuyas órbitas llegan a 1. En cada turno el jugador elige un recipiente con más de una canica y le aplica la regla. Entonces toda partida dura exactamente $\sum_i K(n_i)$ jugadas, y el primer jugador gana si y solo si esta suma es impar.*

Demostración. Cada jugada hace avanzar un paso exactamente una de las órbitas, y la partida termina cuando todas han llegado a 1. Equivalentemente, $\sum_i G_{n_i}$ es una suma de ceros y asteriscos, que vale $*$ si y solo si hay un número impar de asteriscos. $\square$

La elección de recipiente no influye en el resultado: la estrategia es irrelevante. Para obtener una variante en la que la elección pueda influir en el resultado, modificamos ahora las jugadas permitidas.

3. El juego con atajo

Definición 3.1. El *juego con atajo* H_n se juega como G_n , salvo que desde un estado impar $m > 1$ el jugador elige entre dos jugadas:

1. la jugada simple: se añaden $2m + 1$ canicas y el recipiente pasa a $3m + 1$;
2. la jugada compuesta: se añaden $2m + 1$ canicas y, en el mismo turno, se retira la mitad; el recipiente pasa a $T(m) = (3m + 1)/2$.

Desde un estado par la única jugada es retirar la mitad, y la posición 1 no tiene opciones.

Proposición 3.2. H_n es un juego finito si y solo si la órbita de n llega a 1. En tal caso toda partida tiene a lo sumo $K(n)$ jugadas y termina en 1.

Demostración. Toda jugada avanza uno o dos pasos a lo largo de la órbita de Collatz de n , y toda posición distinta de 1 tiene alguna jugada. Un atajo no puede saltarse la primera llegada a 1, pues su posición intermedia es $3m + 1 > 1$ para un impar $m > 1$. Si la órbita llega a 1 en $K(n)$ pasos, ninguna partida puede superar esa longitud y solo puede terminar en 1. Si no llega, ninguna partida termina: cualquier sucesión de jugadas recorre la órbita sin alcanzar nunca 1. $\square$

Hasta introducir la función aritmética γ , suponemos que la órbita de n llega a 1, de modo que H_n es un juego imparcial finito y tiene valor de Grundy, que escribimos $g(n)$. Las posiciones de H_n son los términos de la órbita de n , y el valor de cada una de ellas no depende de dónde empezó la partida.

Teorema 3.3. *Sea n un entero positivo cuya órbita llega a 1. Entonces:*

1. *si $n = 2^v$ con $v \geq 0$, entonces $g(n) = v \bmod 2$;*
2. *si $n = 2^v a$ con $v \geq 1$ y $a > 1$ impar, entonces $g(n) = 0$ si v es impar y $g(n) = 1$ si v es par;*
3. *si $n > 1$ es impar, entonces $g(n) = 2$ si $\nu_2(n+1)$ es impar y $g(n) = 1$ si $\nu_2(n+1)$ es par.*

En lenguaje binario: para n par (que no sea potencia de 2) el valor lo decide la paridad del número de ceros finales, y para $n > 1$ impar la paridad del número de unos finales.

Lema 3.4. *Si m es par, $g(m) = 1$ si $g(m/2) = 0$, y $g(m) = 0$ en otro caso.*

Demostración. La única opción es $m/2$, y $\text{mex}\{0\} = 1$, $\text{mex}\{x\} = 0$ para $x \neq 0$. $\square$

Lema 3.5. *Para toda posición m de H_n : si m es par o $m = 1$, $g(m) \in \{0, 1\}$; si $m > 1$ es impar, $g(m) \in \{1, 2\}$. Además, para $m > 1$ impar,*

$$g(m) = \begin{cases} 1, & g(T(m)) = 2, \\ 2, & g(T(m)) \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Demostración. Por inducción sobre el número $K(m)$ de pasos ordinarios hasta 1. Para $m = 1$, $g = 0$. Si m es par, el Lema 3.4 da $g(m) \in \{0, 1\}$. Si $m > 1$ es impar, sus opciones son $3m+1$, que es par, y $T(m)$. Por el Lema 3.4, $g(3m+1) = 1$ si $g(T(m)) = 0$ y $g(3m+1) = 0$ en otro caso. Por hipótesis de inducción $g(T(m)) \in \{0, 1, 2\}$, y los conjuntos de valores de las opciones son:

$$g(T(m)) = 0 : \{1, 0\}; \quad g(T(m)) = 1 : \{0, 1\}; \quad g(T(m)) = 2 : \{0, 2\}.$$

Sus mex son 2, 2 y 1, respectivamente. $\square$

Demostración del Teorema 3.3. Casos 1 y 2. Aplicando el Lema 3.4 repetidamente, los valores de $a, 2a, 4a, \dots$ se obtienen iterando la aplicación $x \mapsto [x = 0]$. Si $a = 1$, se parte de $g(1) = 0$ y se obtiene $0, 1, 0, 1, \dots$, es decir, $g(2^v) = v \bmod 2$. Si $a > 1$ es impar, el Lema 3.5 da $g(a) \geq 1$, luego $g(2a) = 0$, $g(4a) = 1$, $g(8a) = 0$, etc.: $g(2^v a) = 0$ para v impar y 1 para $v \geq 2$ par.

Caso 3. Sea $m > 1$ impar y $j = \nu_2(m+1) \geq 1$. Si $j = 1$, es decir, $m \equiv 1 \pmod{4}$, entonces $T(m)$ es par, $g(T(m)) \in \{0, 1\}$ por el Lema 3.5, y $g(m) = 2$. Si $j \geq 2$, es decir, $m \equiv 3 \pmod{4}$, entonces $T(m)$ es impar y mayor que 1, y como

$$T(m) + 1 = \frac{3}{2}(m+1),$$

se tiene $\nu_2(T(m)+1) = j-1$. Por el Lema 3.5, $g(m) = 3 - g(T(m))$ cuando $T(m)$ es impar mayor que 1. Por inducción sobre j , $g(m) = 2$ si j es impar y $g(m) = 1$ si j es par. $\square$

Ejemplo 3.6. Para $n = 1, \dots, 16$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$g(n)$	0	1	1	0	2	0	2	1	2	0	1	1	2	0	1	0

Por ejemplo, $7 = 111_2$ termina en tres unos y vale 2; $15 = 1111_2$ termina en cuatro y vale 1; $12 = 1100_2$ termina en dos ceros y vale 1.

Corolario 3.7 (Juego perfecto sin conocer las órbitas). *En una suma de juegos con atajo $H_{n_1} + \dots + H_{n_r}$ cuyas órbitas llegan a 1, el primer jugador gana si y solo si $g(n_1) \oplus \dots \oplus g(n_r) \neq 0$. Desde cualquier posición cuya suma Nim sea distinta de 0, existe una jugada que la convierte en 0. Para encontrarla basta calcular los valores de los contenidos actuales y de sus opciones inmediatas mediante el Teorema 3.3, distinguiendo las potencias de 2 de los demás pares.*

Demostración. Es el teorema de Sprague–Grundy junto con el Teorema 3.3. Si la suma Nim es distinta de 0, se examinan las jugadas legales y se elige una que deje suma 0. Desde una suma 0, cualquier jugada del adversario deja suma distinta de 0, y se repite la respuesta. La terminación garantiza que este procedimiento conduce a una victoria. No es necesario calcular las órbitas completas: basta reconocer las potencias de 2 y calcular las valuaciones pertinentes en las posiciones actuales y sus opciones inmediatas. $\square$

3.1. La fórmula aritmética y sus densidades

La fórmula del Teorema 3.3 define una función aritmética γ sobre todos los enteros positivos, sin hipótesis de terminación:

$$\gamma(n) = \begin{cases} v \bmod 2, & n = 2^v, \quad v \geq 0, \\ 0, & n = 2^v a, \quad a > 1 \text{ impar}, \quad v \geq 1 \text{ impar}, \\ 1, & n = 2^v a, \quad a > 1 \text{ impar}, \quad v \geq 2 \text{ par}, \\ 2, & n > 1 \text{ impar}, \quad \nu_2(n+1) \text{ impar}, \\ 1, & n > 1 \text{ impar}, \quad \nu_2(n+1) \text{ par}. \end{cases}$$

El teorema afirma que $g(n) = \gamma(n)$ siempre que la órbita de n llegue a 1.

Las tres clases definidas por $\gamma(n) = 0, 1, 2$ tienen densidad natural $1/3$, sin necesidad de suponer la conjetura. En efecto, para cada $k \geq 1$, las condiciones $\nu_2(n) = k$ y $\nu_2(n+1) = k$ tienen ambas densidad $2^{-(k+1)}$. Por tanto,

$$\sum_{\substack{k \geq 1 \\ k \text{ impar}}} 2^{-(k+1)} = \frac{1}{3}, \quad \sum_{\substack{k \geq 1 \\ k \text{ par}}} 2^{-(k+1)} = \frac{1}{6}.$$

Estas sumas dan densidad $1/3$ al valor 0, que, salvo la excepción de 1, sólo toman los pares y $1/3$ al valor 2, que sólo toman los impares y $1/6 + 1/6 = 1/3$ al valor 1. Las excepciones de las potencias de 2 y de 1 tienen densidad cero; las colas de las clases de valoración al menos k tienen densidad 2^{-k} , lo que justifica el paso a las sumas infinitas. Bajo la conjetura de Collatz, estas son también las densidades de los valores de Grundy de toda la familia. Para $1 \leq n < 10^5$, los tres valores aparecen 33334, 33332 y 33333 veces, respectivamente.

La función γ satisface, además, las ecuaciones locales

$$\gamma(1) = 0, \quad \gamma(m) = \begin{cases} \text{mex}\{\gamma(m/2)\}, & m \text{ par}, \\ \text{mex}\{\gamma(3m+1), \gamma(T(m))\}, & m > 1 \text{ impar}. \end{cases}$$

Esto se comprueba directamente: para todo $x \geq 1$ se cumple $\gamma(2x) = \text{mex}\{\gamma(x)\}$, pues si x es una potencia de 2 los valores 0 y 1 se alternan al duplicar, y si $x = 2^v a$ con $a > 1$ impar se tiene $\gamma(a) \geq 1$, de modo que la alternancia empieza con $\gamma(2a) = 0$; para un impar con $\nu_2(m+1) = 1$, $T(m)$ es par y las opciones tienen valores 0 y 1; si $\nu_2(m+1) \geq 2$, $T(m)$ es

impar, su valoración disminuye en uno y sus valores 1, 2 se alternan. En este último caso $\gamma(3m+1) = 0$. Así se obtienen los mismos tres conjuntos de opciones del Lema 3.5, sin utilizar la terminación. Satisfacer estas ecuaciones no basta, sin embargo, para demostrar que las partidas terminan ni para interpretar γ como un valor de Grundy ordinario en una posición no terminante.

3.2. Unicidad incondicional de la solución mex

La función aritmética γ definida anteriormente satisface las ecuaciones mex locales para todo entero positivo, sin hipótesis de terminación. Demostramos ahora que es la única función con esta propiedad. Esta afirmación concierne al sistema de ecuaciones, no a la existencia de valores de Grundy ordinarios en posiciones cuyas partidas no terminan.

Teorema 3.8 (Unicidad global de la solución mex). *Sea $f : \mathbb{N}_{>0} \rightarrow \mathbb{N}_0$ una función que satisfice*

$$f(1) = 0, \quad f(n) = \begin{cases} \text{mex}\{f(n/2)\}, & n > 1 \text{ par}, \\ \text{mex}\left\{f(3n+1), f\left(\frac{3n+1}{2}\right)\right\}, & n > 1 \text{ impar}. \end{cases} \quad (1)$$

Entonces $f = \gamma$. En particular, el sistema (1) tiene exactamente una solución en funciones $\mathbb{N}_{>0} \rightarrow \mathbb{N}_0$, con independencia de la conjetura de Collatz.

Demostración. La existencia ya se ha comprobado para γ . Probamos la unicidad. Para todo m par, la ecuación correspondiente implica $f(m) \in \{0, 1\}$ y, más precisamente,

$$f(2x) = \begin{cases} 1, & f(x) = 0, \\ 0, & f(x) \neq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Sea ahora $n > 1$ impar y pongamos $t = (3n+1)/2$. Sus dos opciones son t y $2t$. Por (2), si $f(t) = 0$ entonces $f(2t) = 1$, mientras que si $f(t) \neq 0$ entonces $f(2t) = 0$. En ambos casos el conjunto de etiquetas de las opciones contiene el valor 0. Por tanto, $f(n) \neq 0$; además, al haber solamente dos opciones, $f(n) \leq 2$. Así,

$$f(n) \in \{1, 2\} \quad (n > 1 \text{ impar}). \quad (3)$$

Si $n \equiv 1 \pmod{4}$, entonces t es par. Como $f(t) \in \{0, 1\}$, la pareja $\{f(t), f(2t)\}$ es exactamente $\{0, 1\}$, y resulta

$$f(n) = 2 \quad (n \equiv 1 \pmod{4}, n > 1). \quad (4)$$

Si $n \equiv 3 \pmod{4}$, entonces t es impar y $t > 1$. Por (3), $f(t) \in \{1, 2\}$, de donde $f(2t) = 0$ y

$$f(n) = \text{mex}\{0, f(t)\} = 3 - f(t). \quad (5)$$

Por otra parte,

$$t+1 = \frac{3(n+1)}{2}, \quad \nu_2(t+1) = \nu_2(n+1) - 1.$$

Aunque t pueda ser mayor que n , el parámetro $\nu_2(n+1)$ disminuye estrictamente mientras las posiciones siguen siendo impares. La igualdad (4) proporciona el caso inicial $\nu_2(n+1) = 1$; la recurrencia (5) permite una inducción sobre $\nu_2(n+1)$, sin necesidad de conocer la terminación de la órbita. Concluimos que

$$f(n) = \begin{cases} 2, & \nu_2(n+1) \text{ impar}, \\ 1, & \nu_2(n+1) \text{ par}, \end{cases} \quad (n > 1 \text{ impar}). \quad (6)$$

Finalmente, si $n = 2^v a$, con $v \geq 1$ y a impar, iteramos (2). Para $a = 1$ partimos de $f(1) = 0$ y obtenemos $f(2^v) = v \bmod 2$. Para $a > 1$, por (3) tenemos $f(a) \neq 0$; por tanto, $f(2^v a) = 0$ cuando v es impar y $f(2^v a) = 1$ cuando v es par. Estas son precisamente todas las fórmulas que definen γ . Luego $f = \gamma$, como queríamos demostrar. $\square$

Observación 3.9 (Alcance de la unicidad). La unicidad anterior es puramente algebraica: no implica que las partidas iniciadas en cualquier entero positivo sean finitas. En las posiciones cuya órbita llega a 1, γ coincide con el valor de Grundy ordinario, según el Teorema 3.3. En una hipotética posición no terminante, $\gamma(n)$ sigue estando determinado por la única solución global del sistema mex, pero no adquiere por ello la interpretación usual de un valor de Grundy para un juego bien fundado.

4. Lectura 2-ádica

En el escrito *Parejas, ternas y reservas* [4], la longitud de la racha de divisiones por 2 que sigue al paso $a \mapsto 3a + 1$, con a impar positivo, resultó ser $\nu_2(a - \theta)$, con

$$\theta = -\frac{1}{3} = \dots 010101_2 \in \mathbb{Z}_2,$$

pues $\nu_2(3a + 1) = \nu_2(a - \theta)$, al ser 3 una unidad 2-ádica. El punto θ es el único impar 2-ádico para el que $3\theta + 1 = 0$; representa la racha formal infinita de divisiones por 2 de ese resultado nulo, no una partida del juego sobre enteros positivos.

El Teorema 3.3 hace aparecer el punto complementario. La aplicación T se extiende a los enteros 2-ádicos impares y tiene el punto fijo

$$T(-1) = -1 = \dots 1111_2,$$

el único entero 2-ádico con una racha infinita de transiciones impar-impar. La cantidad $\nu_2(n+1)$ que decide el valor de un impar es su proximidad 2-ádica a -1 : para $n > 1$ impar, el número de jugadas compuestas consecutivas cuyo estado de llegada sigue siendo impar es exactamente $\nu_2(n+1) - 1$. Una aplicación adicional de T llega por primera vez a un par. Por ejemplo, $7 \mapsto 11 \mapsto 17 \mapsto 26$ contiene dos transiciones impar-impar y una tercera que llega a un par. La paridad de la cadena impar es lo que el valor de Grundy registra.

Punto 2-ádico	Racha infinita de	Mide
$\theta = -1/3$	divisiones formales del resultado nulo	longitud de la racha tras un impar, $\nu_2(a - \theta)$
-1	transiciones impar-impar	valor de Grundy de un impar, vía $\nu_2(n + 1)$

Para los pares, el papel correspondiente lo desempeña el punto 0: la valoración $\nu_2(n)$ mide la proximidad 2-ádica de n a 0, y su paridad decide el valor de un par, salvo en las potencias de 2, donde la regla se invierte.

5. Alcance

La teoría de Conway se aplica a las variantes del juego de canicas sin ninguna dificultad técnica, pero con una condición: la finitud del juego asociado a n equivale a que la órbita de n llegue a 1 (Proposiciones 2.2 y 3.2). Para estudiar un n concreto basta establecer la terminación de su órbita; no es necesario admitir la conjetura universal. En cambio, afirmar que todos los juegos de la familia son finitos equivale exactamente a la conjetura

de Collatz. Las reglas siguen definiendo un proceso aunque no termine, pero en ese caso no se aplica directamente el marco finito de Sprague–Grundy.

Una vez establecida la terminación de las órbitas consideradas, lo que la teoría calcula es local. El Teorema 3.3 determina el valor de cada posición a partir de sus rachas binarias finales y de la distinción de las potencias de 2, sin información alguna sobre el comportamiento a largo plazo de la órbita. En particular, el valor de Grundy no distingue entre un n cuya órbita es corta y otro cuya órbita es muy larga, y no ofrece por sí solo ningún criterio de terminación. La existencia y unicidad incondicionales de la función aritmética γ como solución de las ecuaciones locales (Teorema 3.8) hacen explícita esta separación.

Esta conclusión es paralela a la de la contabilidad de flujos en [4]: una estructura aplicable y bien definida, que sin embargo no ve la parte global del problema. Conway conocía bien esa frontera por otro camino: en [3] demostró que las generalizaciones naturales de la función de Collatz pueden simular máquinas de Turing, de modo que el problema general de terminación para esa familia es indecidible. Este resultado sobre una familia generalizada no establece la indecidibilidad del problema concreto $3n + 1$.

Verificación. La fórmula del Teorema 3.3 se ha comprobado computacionalmente, calculando los valores de Grundy mediante la recurrencia de las opciones, con condición terminal $g(1) = 0$ y memorización de los valores ya obtenidos, para todo $1 \leq n < 10^5$, sin excepciones. El cálculo es independiente de la fórmula cerrada y reproduce las frecuencias indicadas en la sección 3.

Referencias

- [1] J. H. Conway, *On Numbers and Games*, Academic Press, 1976.
- [2] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy, *Winning Ways for your Mathematical Plays*, Academic Press, 1982.
- [3] J. H. Conway, Unpredictable iterations, en *Proceedings of the Number Theory Conference*, Boulder, 1972, 49–52.
- [4] M. Cerdá Bennassar, *Parejas, ternas y reservas. Estructura aritmética del modelo material de Collatz*, septiembre de 2026.