

Modelo material de la iteración de Collatz con canicas

Miguel Cerdá Bennassar

Septiembre de 2026

Resumen

Se presenta una interpretación material de la función de Collatz mediante un recipiente, canicas y un segundo jugador. Cada entero positivo se representa por el número de canicas que contiene el recipiente. Las reglas aritméticas $n \mapsto n/2$ y $n \mapsto 3n+1$ se realizan, respectivamente, retirando la mitad de las canicas o añadiendo $2n+1$ canicas. Esta formulación permite estudiar la conjetura como un juego o proceso material discreto, sin necesidad de comenzar con la representación mediante grafos u órbitas.

1. La idea básica

Sea un recipiente que contiene inicialmente $n \in \mathbb{N}_{>0}$ canicas. El número de canicas presentes representa el estado del sistema. Se juega por turnos según la paridad del contenido del recipiente.

Definición 1 (Juego material de Collatz). *Si el recipiente contiene n canicas, se aplica una de las siguientes reglas:*

$$C(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ es par,} \\ 3n + 1, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Materialmente, las reglas se ejecutan de la manera siguiente:

- Si n es par, se retiran $n/2$ canicas del recipiente y se entregan al segundo jugador. Permanecen $n/2$ canicas.
- Si n es impar, el segundo jugador añade $2n + 1$ canicas al recipiente. Como ya había n canicas, el nuevo contenido es

$$n + (2n + 1) = 3n + 1.$$

- Si queda una sola canica, se detiene el juego.

La regla impar también puede describirse como un reemplazo: el segundo jugador toma las n canicas presentes y devuelve $3n + 1$ canicas. El cambio neto del recipiente es, en ambos relatos,

$$(3n + 1) - n = 2n + 1.$$

2. De una operación aislada a un proceso repetido

La operación “quitar la mitad” tiene una realización inmediata con canicas cuando el número de canicas es par. Por ejemplo,

$$100 \mapsto 50.$$

Se forman dos grupos de cincuenta canicas y se retira uno de ellos. Como acción aislada, esto es simplemente una evaluación de la regla $n \mapsto n/2$.

Si se intenta repetir esa regla usando sólo canicas enteras, aparece un obstáculo. Por ejemplo,

$$100 \mapsto 50 \mapsto 25,$$

y en 25 no se puede retirar exactamente la mitad manteniendo cantidades enteras. La regla $n \mapsto n/2$ está entonces definida sólo para estados pares.

La regla $n \mapsto 3n + 1$ completa el juego para los estados impares. Así se obtiene una regla definida para todo entero positivo:

$$C : \mathbb{N}_{>0} \longrightarrow \mathbb{N}_{>0}.$$

Cada resultado vuelve a ser un número positivo de canicas y puede usarse como nuevo estado del recipiente.

3. Ejemplo: una partida que comienza con siete canicas

Si el recipiente contiene siete canicas, se aplica la regla impar. Se añaden

$$2 \cdot 7 + 1 = 15$$

canicas, de modo que quedan veintidós:

$$7 \mapsto 22.$$

Después se alternan retiradas y adiciones según la paridad:

$$\begin{aligned} 7 &\mapsto 22 \mapsto 11 \mapsto 34 \mapsto 17 \\ &\mapsto 52 \mapsto 26 \mapsto 13 \mapsto 40 \\ &\mapsto 20 \mapsto 10 \mapsto 5 \mapsto 16 \\ &\mapsto 8 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1. \end{aligned}$$

La siguiente tabla traduce algunos pasos a acciones materiales.

Antes		Acción material	Después
7	$\rightarrow$	Añadir $2 \cdot 7 + 1 = 15$ canicas	22
22	$\rightarrow$	Retirar $22/2 = 11$ canicas	11
11	$\rightarrow$	Añadir $2 \cdot 11 + 1 = 23$ canicas	34
34	$\rightarrow$	Retirar $34/2 = 17$ canicas	17
17	$\rightarrow$	Añadir $2 \cdot 17 + 1 = 35$ canicas	52
52	$\rightarrow$	Retirar $52/2 = 26$ canicas	26

La partida se detiene por convención cuando queda una canica. Si no se detuviera, la regla original continuaría mediante el ciclo

$$1 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1.$$

4. Lectura del juego

Este modelo permite formular las cuestiones de Collatz en términos materiales.

Pregunta aritmética	Pregunta material equivalente
? Toda sucesión llega a 1	? Toda partida deja finalmente una sola canica en el recipiente
? Existe un ciclo no trivial	? El recipiente puede repetir una cantidad anterior sin llegar a una canica
? Existe una sucesión divergente	? El número de canicas puede crecer sin límite y no volver a una cantidad pequeña
?Cuál es la altura máxima	?Cuál es el mayor número de canicas alcanzado durante una partida

5. La conjetura en lenguaje material

La conjetura de Collatz afirma que para todo entero positivo n , la repetición de la regla

$$C(n) = \begin{cases} n/2, & n \equiv 0 \pmod{2}, \\ 3n + 1, & n \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases}$$

alcanza finalmente el valor 1.

En el lenguaje de las canicas puede enunciarse así:

Toda partida que comienza con un número finito y positivo de canicas termina, tras un número finito de turnos, con una sola canica en el recipiente.

De manera formal, esto equivale a afirmar que

$$\forall n \in \mathbb{N}_{>0}, \quad \exists k \geq 0 \text{ tal que } C^k(n) = 1.$$

6. Alcance y límites del modelo

El modelo de canicas es una realización concreta y visual de cada paso de la regla. Permite contar, retirar, añadir, comparar cantidades y registrar experimentalmente partidas particulares. Por ello es especialmente adecuado para desarrollar intuición y proponer preguntas sobre el proceso.

Al mismo tiempo, una partida material concreta sólo examina un valor inicial y un número finito de pasos. La conjetura, en cambio, se refiere simultáneamente a todos los enteros positivos. La formulación material no cambia la afirmación matemática: ofrece una manera tangible de pensarla.

Observación 1. *La función de Collatz puede considerarse, a la vez, como una regla aritmética abstracta y como un procedimiento físicamente realizable con colecciones finitas de canicas. La primera perspectiva permite el enunciado universal; la segunda permite observar y ejecutar cada transformación de forma directa.*

7. Resumen clasificatorio

Estado: número de canicas en un recipiente.
Espacio de estados: $\mathbb{N}_{>0}$.
Regla par: retirar exactamente la mitad.
Regla impar: añadir el doble de las canicas presentes y una más.
Proceso: repetición discreta de una misma regla.
Detención experimental: una sola canica.
Pregunta central: ¿toda partida finita alcanza una canica?