

Parejas, ternas y reservas

Estructura aritmética del modelo material de Collatz

Miguel Cerdá Bennassar

Septiembre de 2026

Resumen

En el modelo material de la iteración de Collatz, un recipiente contiene n canicas; si n es par se retira la mitad y se entrega a un segundo jugador, y si n es impar el segundo jugador añade $2n + 1$. Este escrito estudia tres estructuras que el modelo hace visibles. La primera es la contabilidad del segundo jugador: su saldo, su reserva necesaria y sus flujos brutos. Se demuestra que la identidad de flujos $E = 4O + 2o + 2(n - 1)$ no depende de la longitud de las rachas de retiradas y, en consecuencia, no impone ninguna restricción sobre ciclos. La segunda es la agrupación en ternas: tras la primera jugada impar no vuelven a formarse ternas exactas, y el resto módulo 3^s del siguiente estado impar registra la longitud de la racha módulo $2 \cdot 3^{s-1}$. La tercera es el emparejamiento anidado: la longitud de una racha que sigue a un estado impar a es $\nu_2(a + 1/3)$, es decir, el número de cifras binarias finales de a que coinciden con $\dots 010101_2$. Las dos últimas estructuras describen un intercambio: lo que las parejas consumen, las ternas lo registran. Todos los resultados son elementales y varios son conocidos; el objetivo es reunirlos en un lenguaje material único y separar con precisión lo que contiene información de lo que no.

1. El juego

Sea $C: \mathbb{N}_{>0} \rightarrow \mathbb{N}_{>0}$ la función de Collatz,

$$C(n) = \begin{cases} n/2, & n \text{ par}, \\ 3n + 1, & n \text{ impar}. \end{cases}$$

En el *modelo material*, el estado es el número de canicas de un recipiente. Si el recipiente contiene n canicas con n par, se retiran $n/2$ y se entregan a un segundo jugador. Si n es impar, el segundo jugador añade $2n + 1$ canicas, de modo que el contenido pasa a ser $3n + 1$. Por convención, la partida se detiene cuando queda una sola canica.

Escribimos $x_0 = n$ y $x_{i+1} = C(x_i)$. Si la partida termina, $K = K(n)$ denota el primer índice con $x_K = 1$.

Definición 1.1. Una *racha* es una sucesión maximal de retiradas consecutivas. Si a es un estado impar, la racha que sigue a la jugada impar empieza en $3a + 1$ y consta de

$$k = \nu_2(3a + 1) \geq 1$$

retiradas; termina en el estado impar $a' = (3a + 1)/2^k$. Escribimos la trayectoria impar como $a_1, a_2, \dots$ con $a_{j+1} = (3a_j + 1)/2^{k_j}$.

Si n es par, la partida comienza con una racha inicial de $\nu_2(n)$ retiradas que no va precedida de ninguna jugada impar.

2. El saldo y la reserva del segundo jugador

Definición 2.1. El *saldo* del segundo jugador tras k turnos es la diferencia entre lo que ha recibido y lo que ha entregado:

$$S_k(n) = n - C^k(n).$$

La igualdad es simplemente conservación de canicas: todo lo que sale del recipiente va al segundo jugador y todo lo que entra procede de él.

Proposición 2.2 (Tricotomía en lenguaje de saldos). *Para cada $n \in \mathbb{N}_{>0}$ se da exactamente uno de los casos siguientes.*

1. La órbita alcanza el 1, y entonces el saldo final es $S_K(n) = n - 1$.
2. La órbita es acotada y no alcanza el 1; entonces entra en un ciclo que no contiene el 1, la sucesión $(S_k(n))_k$ es eventualmente periódica y el flujo neto a lo largo de cada vuelta del ciclo es nulo.
3. La órbita no está acotada, y entonces $\liminf_k S_k(n) = -\infty$.

Demostración. Una sucesión de enteros positivos generada por una regla determinista y acotada toma finitos valores, luego repite uno y es eventualmente periódica. Por tanto, o la órbita no está acotada (caso 3, pues $S_k = n - C^k(n)$), o es acotada y, por tanto, eventualmente periódica; en este último caso, o alcanza el 1 (caso 1) o no lo alcanza (caso 2). En el caso periódico, $S_{k+p} = S_k$ para el periodo p y k grande, luego el flujo neto de una vuelta es cero. $\square$

Definición 2.3. La *reserva necesaria* del segundo jugador en la partida que empieza con n canicas es

$$R(n) = \sup_{k \geq 0} C^k(n) - n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Es la cantidad mínima de canicas que el segundo jugador debe tener al empezar para poder atender todas las jugadas impares, contando con lo que va recibiendo.

En efecto, el segundo jugador puede atender el turno k si y solo si su capital inicial más su saldo $S_k(n)$ es no negativo, y $\min_k S_k(n) = -R(n)$.

Corolario 2.4. *La conjetura de Collatz equivale a la conjunción de las dos afirmaciones siguientes:*

1. $R(n) < \infty$ para todo n (ninguna partida exige una reserva infinita);
2. ninguna partida vuelve a un estado anterior sin haber pasado por una canica.

Observación 2.5. La reserva es la altura máxima de la órbita menos el valor inicial. El lenguaje del segundo jugador no añade aquí información aritmética; su utilidad es interpretativa: la divergencia corresponde a un segundo jugador que necesita recursos ilimitados.

3. Flujos brutos

Supongamos que la partida termina. Sean E la suma de los estados pares x_i con $i < K$, O la suma de los estados impares x_i con $i < K$, y o el número de estos últimos. En cada retirada el segundo jugador recibe $x_i/2$, y en cada jugada impar entrega $2x_i + 1$. Llamamos *flujo recibido* y *flujo entregado* a

$$F_{\text{rec}} = \frac{E}{2}, \quad F_{\text{ent}} = 2O + o.$$

Proposición 3.1 (Identidad de flujos). *Si la partida que empieza en n alcanza una canica, entonces $F_{\text{rec}} - F_{\text{ent}} = n - 1$, es decir,*

$$E = 4O + 2o + 2(n - 1).$$

Demostración. Por la Proposición 2.2, el saldo final es $n - 1$, y el saldo final es exactamente $F_{\text{rec}} - F_{\text{ent}}$. $\square$

Ejemplo 3.2. Para $n = 7$ los estados impares anteriores a la canica final son 7, 11, 17, 13, 5, con $O = 53$ y $o = 5$, y los pares suman $E = 234$. En efecto, $4 \cdot 53 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6 = 234$.

La identidad parece relacionar de forma no trivial los estados pares con los impares. El lema siguiente muestra que no es así.

Lema 3.3 (Lo recibido en una racha). *En una racha que empieza en el estado par m y termina, tras $k \geq 1$ retiradas, en el estado $a' = m/2^k$, el segundo jugador recibe $m - a'$ canicas, y la suma de los estados pares de la racha es*

$$m + \frac{m}{2} + \cdots + \frac{m}{2^{k-1}} = 2m - 2a'.$$

Ambas cantidades dependen solo de los extremos m y a' , no de k .

Demostración. Lo recibido es lo que desaparece del recipiente, $m - a'$. La suma es la de una progresión geométrica: $m(1 - 2^{-k})/(1 - \frac{1}{2}) = 2m - 2m/2^k$. $\square$

Teorema 3.4 (La contabilidad no ve las rachas). *Sean $a_1, \dots, a_{o+1}$ enteros no nulos y $k_1, \dots, k_o \geq 1$ enteros tales que $2^{k_j} a_{j+1} = 3a_j + 1$ para cada j . Entonces la suma E' de los estados pares intermedios*

$$3a_j + 1, \frac{3a_j + 1}{2}, \dots, \frac{3a_j + 1}{2^{k_j-1}} \quad (1 \leq j \leq o)$$

vale

$$E' = \sum_{j=1}^o (6a_j + 2 - 2a_{j+1}) = 4 \sum_{j=1}^o a_j + 2o + 2(a_1 - a_{o+1}),$$

expresión en la que no intervienen los exponentes k_j . En particular, si $a_{o+1} = a_1$ (un ciclo en $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$), se cumple

$$E = 4O + 2o$$

para todo ciclo, cualesquiera que sean las longitudes de sus rachas.

Demostración. Se aplica el Lema 3.3 a cada racha con $m = 3a_j + 1$ y $a' = a_{j+1}$, y se suma, usando $\sum_{j=1}^o a_{j+1} = \sum_{j=1}^o a_j - a_1 + a_{o+1}$. $\square$

Con $a_1 = n$ impar y $a_{o+1} = 1$, el Teorema 3.4 reproduce la Proposición 3.1; si n es par, basta añadir la racha inicial, que por el Lema 3.3 contribuye $2n - 2a_1$ a E .

Ejemplo 3.5. La identidad $E = 4O + 2o$ se cumple en el ciclo trivial $\{1, 4, 2\}$ ($E = 6$, $O = 1$, $o = 1$) y en los tres ciclos conocidos de la regla sobre los enteros negativos: en $\{-1, -2\}$ se tiene $E = -2 = 4(-1) + 2$; en el ciclo de -5 , $E = -44$; en el ciclo de -17 , $E = -1294$, en los tres casos igual a $4O + 2o$.

Observación 3.6 (Comparación con la ecuación multiplicativa de ciclo). En un ciclo con estados impares $a_1, \dots, a_o$ y $K_{\text{par}} = \sum k_j$ retiradas, el producto de los cocientes a_{j+1}/a_j vale 1, lo que da

$$2^{K_{\text{par}}} = \prod_{j=1}^o \left(3 + \frac{1}{a_j}\right).$$

Esta ecuación contiene los exponentes k_j a través de su suma y, para ciclos de enteros positivos, obliga a $2^{K_{\text{par}}} > 3^o$; es el punto de partida de los métodos clásicos de exclusión de ciclos. La identidad aditiva del Teorema 3.4, en cambio, es independiente de los k_j : la contabilidad del segundo jugador no distingue una racha larga de una corta con los mismos extremos. Por eso se satisface igual en el ciclo trivial y en los ciclos negativos, y no puede excluir ningún ciclo. Dejamos constancia de ello para cerrar esta vía.

4. Ternas

Agrupar las canicas de tres en tres equivale a leer el estado módulo 3.

Proposición 4.1. *Sea $x \in \mathbb{N}_{>0}$.*

1. *Si x es impar, $C(x) \equiv 1 \pmod{3}$.*
2. *Si x es par, $C(x) = x/2 \equiv -x \pmod{3}$.*

Demostración. $3x + 1 \equiv 1$, y $2^{-1} \equiv 2 \equiv -1 \pmod{3}$. □

Corolario 4.2. *Sea a un estado impar y $k = \nu_2(3a + 1)$. Los estados de la racha que sigue son, módulo 3, $1, 2, 1, 2, \dots$, y el siguiente estado impar cumple*

$$a' \equiv (-1)^k \pmod{3}.$$

En particular:

1. *tras la primera jugada impar de la partida no vuelve a aparecer ningún múltiplo de 3;*
2. *el resto de a' en ternas determina la paridad de la racha anterior: k es par si y solo si sobra una canica, e impar si y solo si sobran dos.*

En lenguaje material: una vez que el segundo jugador ha intervenido, las canicas nunca vuelven a formar ternas exactas, y contar lo que sobra al agrupar en ternas dice si la última racha tuvo un número par o impar de retiradas.

La información se refina al agrupar en bloques de 3^s .

Teorema 4.3 (Las ternas registran las rachas). *Sea $s \geq 1$, sea a un estado impar con $a \not\equiv 0 \pmod{3}$, sea $k = \nu_2(3a + 1)$ y $a' = (3a + 1)/2^k$. Entonces*

$$a' \equiv (3a + 1) 2^{-k} \pmod{3^s},$$

donde $3a + 1 \pmod{3^s}$ depende solo de $a \pmod{3^{s-1}}$. Además, fijado $a \pmod{3^{s-1}}$, la aplicación

$$k \pmod{2 \cdot 3^{s-1}} \longmapsto a' \pmod{3^s}$$

es una biyección sobre las unidades de $\mathbb{Z}/3^s\mathbb{Z}$.

Demostración. La congruencia es inmediata porque 2 es invertible módulo 3^s . Si a se sustituye por $a + 3^{s-1}t$, el número $3a + 1$ cambia en $3^s t$, luego su resto módulo 3^s depende solo de $a \pmod{3^{s-1}}$. Como $a \not\equiv 0 \pmod{3}$, se tiene $3a + 1 \equiv 1 \pmod{3}$, luego $3a + 1$ es una unidad módulo 3^s . Finalmente, 2 es raíz primitiva módulo 3^s para todo $s \geq 1$ (lo es módulo 9, y una raíz primitiva módulo p^2 lo es módulo toda potencia de p), así que $k \mapsto 2^{-k}$ es una biyección de $\mathbb{Z}/2 \cdot 3^{s-1}\mathbb{Z}$ sobre $(\mathbb{Z}/3^s\mathbb{Z})^\times$, y multiplicar por la unidad $3a + 1$ conserva la biyección. □

Ejemplo 4.4 (Novenas). Para $s = 2$, el inverso de 2 módulo 9 es 5, de orden 6, y $3a+1 \equiv 4$ o 7 (mód 9) según $a \equiv 1$ o 2 (mód 3). La tabla da a' mód 9 en función de k mód 6:

k mód 6	1	2	3	4	5	0
$a \equiv 1$ (mód 3)	2	1	5	7	8	4
$a \equiv 2$ (mód 3)	8	4	2	1	5	7

Cada fila recorre las seis unidades módulo 9 exactamente una vez.

Observación 4.5. El Teorema 4.3 no restringe las rachas: toda longitud es compatible con algún resto, y el resto se limita a codificarla. Lo que establece es que la información sobre k no se pierde en el lado ternario, sino que queda escrita en el resto de a' módulo potencias de 3. Leído hacia atrás, es la condición de existencia de predecesores: $a = (2^k a' - 1)/3$ es entero si y solo si $2^k a' \equiv 1$ (mód 3), lo que fija la paridad de k a partir de a' mód 3, de acuerdo con el Corolario 4.2.

5. Parejas

Agrupar las canicas en parejas, luego las parejas en parejas de parejas, y así sucesivamente, equivale a leer la escritura binaria del estado. La *profundidad de emparejamiento* de x es el número de niveles en que el emparejamiento es perfecto, esto es, $\nu_2(x)$; es también la longitud de la racha que empieza en x .

Sea $\theta \in \mathbb{Z}_2$ el entero 2-ádico

$$\theta = -\frac{1}{3} = \sum_{i \geq 0} 4^i = \dots 010101_2.$$

Proposición 5.1. Para todo a impar,

$$\nu_2(3a+1) = \nu_2(a-\theta).$$

Equivalentemente, la longitud de la racha que sigue al estado impar a es el número de cifras binarias finales de a que coinciden con las de $\dots 010101_2$.

Demostración. En $\mathbb{Z}_2$, $3a+1 = 3(a+\frac{1}{3}) = 3(a-\theta)$, y 3 es una unidad 2-ádica. La segunda formulación es la definición de $\nu_2(a-\theta)$. $\square$

Ejemplo 5.2. $7 = 111_2$ coincide con $\dots 0101_2$ solo en la última cifra: racha de longitud 1 ($22 \rightarrow 11$). $5 = 101_2$ coincide en cuatro cifras (0101) y falla en la quinta: racha de longitud 4 ($16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$). $21 = 10101_2$ da una racha de longitud 6 ($64 \rightarrow \dots \rightarrow 1$).

Corolario 5.3. Sea $j \geq 1$.

1. La condición $\nu_2(3a+1) = j$ depende solo de a mód 2^{j+1} .
2. Entre las 2^j clases impares módulo 2^{j+1} , exactamente una da una racha de longitud exactamente j .

Demostración. Por la Proposición 5.1, $\nu_2(3a+1) \geq j$ si y solo si $a \equiv \theta$ (mód 2^j), condición que determina una única clase módulo 2^j y dos clases módulo 2^{j+1} ; de estas, una cumple además $a \equiv \theta$ (mód 2^{j+1}) y la otra no. $\square$

Observación 5.4 (El montón ideal). El número θ es el único entero 2-ádico con racha infinita: $3\theta+1=0$, y el recipiente vacío admite infinitas retiradas. Materialmente, las rachas largas aparecen cuando la configuración de parejas del montón imita la de θ . En términos de acarreo, la jugada impar es la suma binaria $a + (2a+1)$, y la longitud de la racha es la de la cadena de ceros finales que producen los acarreo; la Proposición 5.1 dice cuándo esa cadena es larga.

6. El intercambio entre parejas y ternas

Reunimos los resultados anteriores. Sea a_j un estado impar con $a_j \not\equiv 0 \pmod{3}$ y sea k_j la longitud de la racha siguiente.

1. *Lo que deciden las parejas.* La longitud k_j está determinada por $a_j \pmod{2^{k_j+1}}$ (Corolario 5.3): es la proximidad 2-ádica de a_j a $\theta = -1/3$.
2. *Lo que consumen las parejas.* Cada retirada consume una cifra binaria: si se conoce $x \pmod{2^r}$, tras una retirada solo se conoce $x/2 \pmod{2^{r-1}}$. La racha completa consume k_j cifras.
3. *Lo que registran las ternas.* El resto de a_{j+1} módulo 3^s , junto con $a_j \pmod{3^{s-1}}$, determina $k_j \pmod{2 \cdot 3^{s-1}}$ (Teorema 4.3).
4. *Lo que fija la jugada impar.* La jugada impar lleva el estado a 1 (mód 3) con independencia de a_j , pero su resto 2-ádico depende de todas las cifras de a_j .

En una frase: *lo que las parejas consumen, las ternas lo registran*. Las cifras binarias que la racha gasta para decidir su longitud reaparecen como una rotación del resto ternario por la raíz primitiva 2.

Observación 6.1 (Alcance). Este intercambio es la forma elemental de la incompatibilidad entre las estructuras 2-ádica y 3-ádica que subyace a la dificultad de la conjetura. El modelo material la hace tangible, pero no la resuelve: ninguno de los resultados de este escrito restringe por sí solo la existencia de ciclos no triviales o de órbitas divergentes. Su valor es de organización: separa con precisión lo que no contiene información (la contabilidad de flujos, Teorema 3.4) de lo que sí la contiene (los restos módulo 2^r y 3^s , Teorema 4.3 y Proposición 5.1).

7. Resumen clasificatorio

Objeto material	Objeto aritmético	Contenido
Saldo del segundo jugador	$n - C^k(n)$	Conservación; tricotomía
Reserva necesaria	altura máxima menos n	Divergencia $\Leftrightarrow$ reserva infinita
Flujos brutos	$E = 4O + 2o + 2(n - 1)$	Independiente de las rachas; no restringe ciclos
Resto al agrupar en ternas	$x \pmod{3}$	Sin múltiplos de 3 tras la primera jugada impar; paridad de la racha
Resto al agrupar en bloques de 3^s	$a_{j+1} \pmod{3^s}$	Registra $k_j \pmod{2 \cdot 3^{s-1}}$
Profundidad de emparejamiento	$\nu_2(x)$	Longitud de la racha
Montón ideal	$\theta = -1/3 \in \mathbb{Z}_2$	Racha infinita; $\nu_2(3a + 1) = \nu_2(a - \theta)$

Verificación. Las identidades de las Secciones 3–5 se han comprobado computacionalmente para todo $n \leq 2 \cdot 10^5$, y el Teorema 4.3 para $2 \leq s \leq 5$.