

Collatz e indecidibilidad

III. Conservación de la medida y computación

Miguel Cerdá Bennassar

Septiembre de 2026

Resumen

El escrito II demostró que ninguna función tipo Collatz de tipo primo relativo admite una sección de origen único, de modo que el mecanismo de Conway queda excluido en esa clase, que es exactamente la de las funciones cuya extensión d -ádica conserva la medida de Haar. Este escrito aborda la pregunta siguiente: ¿existe otra forma de computación universal compatible con la conservación de la medida, o la conservación obliga a la decidibilidad? Distinguimos dos lecturas. En su lectura fuerte, según la cual la conservación de una medida bastaría para forzar la decidibilidad, la respuesta es negativa: existen sistemas simbólicos que conservan la medida uniforme y son computacionalmente universales sobre un conjunto numerable de medida nula, exactamente como los enteros dentro de $\mathbb{Z}_d$. En su lectura específica, sobre la clase de tipo primo relativo, la pregunta sigue abierta, y el escrito la delimita con tres resultados: la decidibilidad en los regímenes uniformemente contractivo y expansivo, que obliga a toda función universal a mezclar ramas contractivas y expansivas; la reducción del caso $d = 2$ a la familia $qx + r$; y un modelo de máquina para la clase, en el que cada paso extrae una cifra d -ádica y multiplica el resto por una unidad, sin que ninguna composición de ramas pueda escribir cifras por abajo. No se resuelve la pregunta; se la sitúa.

1. La pregunta y sus dos lecturas

Recordamos del escrito II [2] que una función de tipo primo relativo con módulo $d \geq 2$ es

$$T(x) = \frac{m_i x - r_i}{d} \quad \text{si } x \equiv i \pmod{d},$$

con $\gcd(m_i, d) = 1$ y $m_i i \equiv r_i \pmod{d}$; que su extensión a los enteros d -ádicos $\mathbb{Z}_d$ conserva la medida de Haar μ ; y que no admite secciones de origen único formadas por clases módulo potencias de d . Decimos que una función $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ es *universal* si el problema de alcanzabilidad «dados $x, y \in \mathbb{Z}$, ¿existe $t \geq 0$ con $g^t(x) = y$?» es indecidible.

La pregunta de este escrito admite dos lecturas:

1. *Lectura fuerte.* ¿Obliga la conservación de una medida natural, por sí sola, a que el problema de alcanzabilidad sea decidible?
2. *Lectura específica.* ¿Contiene la clase de tipo primo relativo alguna función universal? (Problema 6.2 del escrito II.)

La Sección 2 responde negativamente a la primera. Las Secciones 3 a 4 delimitan la segunda, que queda abierta.

2. La conservación de la medida no fuerza la decidibilidad

2.1. Los enteros como configuraciones finitas

Proposición 2.1. *Sea $d \geq 2$ y sea $x \in \mathbb{Z}_d$ un entero d -ádico con desarrollo*

$$x = \sum_{j \geq 0} \delta_j d^j, \quad \delta_j \in \{0, \dots, d-1\}.$$

Entonces x es un entero no negativo si y solo si $\delta_j = 0$ para todo j suficientemente grande, y es un entero negativo si y solo si $\delta_j = d-1$ para todo j suficientemente grande.

Demostración. La primera afirmación es la unicidad de la escritura en base d . Para la segunda, $-1 = \sum_{j \geq 0} (d-1)d^j$ en $\mathbb{Z}_d$, y si $x \geq 0$ tiene cifras finalmente nulas, $-1-x$ tiene cifras $d-1-\delta_j$, finalmente iguales a $d-1$. $\square$

Así, dentro del espacio $\mathbb{Z}_d$, que la dinámica de T recorre conservando la medida, los enteros forman un conjunto numerable, invariante por T y de medida nula: son las «configuraciones finitas» respecto de los fondos constantes 0 y $d-1$. Esta es exactamente la situación de la teoría de autómatas celulares, donde la dinámica actúa sobre todo el espacio de configuraciones y la computación ocurre en las configuraciones finitas.

2.2. Un sistema que conserva la medida y es universal

Teorema 2.2. *Existen sistemas dinámicos simbólicos que conservan la medida uniforme de Bernoulli y cuyo problema de alcanzabilidad entre configuraciones finitas es indecidible.*

Demostración. Morita y Harao [7] construyeron autómatas celulares unidimensionales reversibles que son computacionalmente universales: simulan una máquina de Turing reversible universal sobre configuraciones finitas, y el problema de alcanzabilidad entre configuraciones finitas es por tanto indecidible. Un autómata celular reversible es biyectivo, en particular sobreyectivo, y por el teorema de Hedlund [3] todo autómata celular sobreyectivo sobre el desplazamiento completo conserva la medida uniforme de Bernoulli. $\square$

Corolario 2.3. *La conservación de una medida natural no obliga, por sí sola, a la decidibilidad. En particular, el Teorema 5.7 del escrito II no puede reforzarse a una prueba de no universalidad usando solo la invariancia de la medida de Haar.*

Observación 2.4. La medida controla el comportamiento de casi todo punto; la computación ocurre en un conjunto de medida nula. En el escrito II, la medida intervino a través del teorema de recurrencia de Poincaré para excluir secciones de origen único, es decir, para excluir un mecanismo concreto. No hay razón a priori para que excluya todos.

La conexión entre ambos mundos no es solo una analogía. Kari [4] estudió autómatas celulares reversibles que multiplican por 3 y por 3/2 en base 6, mostró que las órbitas de las configuraciones finitas no uniformes contienen todas las palabras finitas sobre el alfabeto, relacionó el autómata de multiplicación por 3/2 con el problema de Mahler sobre los Z -números [6], y observó que una ligera modificación del autómata de multiplicación por 3 simula la función de Collatz.

3. Los regímenes uniformes son decidibles

Proposición 3.1. *Sea g una función tipo Collatz con ramas $x \mapsto a_i x + b_i$.*

1. *Si $|a_i| < 1$ para todo i , el problema de alcanzabilidad de g es decidible.*

2. Si $|a_i| > 1$ para todo i , el problema de alcanzabilidad de g es decidable.

Demostración. Sea $\beta = \max_i |b_i|$.

(1) Sea $\alpha = \max_i |a_i| < 1$ y $B = \beta/(1 - \alpha)$. Entonces $|g(x)| \leq \alpha|x| + \beta$, de modo que $|g(x)| < |x|$ si $|x| > B$, y $|g(x)| \leq B$ si $|x| \leq B$. Toda órbita de x permanece en el conjunto finito $\{z : |z| \leq \max(|x|, B)\}$, luego es finalmente periódica, y basta simularla hasta que repita un valor para decidir si pasa por y .

(2) Sea $\alpha' = \min_i |a_i| > 1$ y $B' = \beta/(\alpha' - 1)$. Entonces $|g(x)| \geq \alpha'|x| - \beta > |x|$ si $|x| > B'$. Sea $K = \max(B', |y|)$. Si la órbita de x alcanza un valor de módulo mayor que K , a partir de ahí el módulo crece estrictamente y nunca vuelve a y . Mientras no lo alcance, permanece en un conjunto finito. Se simula la órbita hasta que pase por y , repita un valor o supere K en módulo; uno de los tres casos ocurre en un número finito de pasos. $\square$

Corolario 3.2. *Toda función tipo Collatz universal tiene al menos una rama con $|a_i| \leq 1$ y al menos una con $|a_i| \geq 1$. Para una función de tipo primo relativo, en la que $|a_i| = |m_i|/d \neq 1$, esto significa que hay ramas con $|m_i| < d$ y ramas con $|m_i| > d$.*

Demostración. Si todas las ramas tuvieran $|a_i| < 1$, o todas $|a_i| > 1$, la Proposición 3.1 daría la decidibilidad. En el caso de tipo primo relativo, $|m_i| = d$ es imposible porque $\gcd(m_i, d) = 1$ y $d \geq 2$. $\square$

Observación 3.3. La Proposición 3.1 no usa la hipótesis de tipo primo relativo; es un hecho general. Su interés aquí es que identifica el régimen *mixto* como el único en que la pregunta específica tiene contenido. La función de Collatz acelerada, con $m = (1, 3)$ y $d = 2$, está en ese régimen.

Corolario 3.4 (El caso $d = 2$). *Las funciones de tipo primo relativo con $d = 2$ en régimen mixto son, salvo el intercambio de las dos clases, las de la forma*

$$T(x) = \begin{cases} (\varepsilon x - r_0)/2, & x \text{ par}, \\ (qx - r_1)/2, & x \text{ impar}, \end{cases}$$

con $\varepsilon \in \{1, -1\}$, q impar con $|q| \geq 3$, r_0 par y r_1 de la misma paridad que q .

Demostración. Con $d = 2$, los m_i son impares, y el régimen mixto exige $|m_i| < 2 < |m_j|$ para alguna elección de $i \neq j$, es decir, $|m_i| = 1$. Las condiciones sobre r_i son $m_i i \equiv r_i \pmod{2}$. $\square$

La familia T_q de los escritos anteriores corresponde a $\varepsilon = 1$, $r_0 = 0$, $r_1 = -1$. Para $d = 2$, la pregunta específica es, por tanto, la de la decidibilidad del problema de alcanzabilidad para la familia de dos parámetros $qx + r$.

4. El modelo de máquina de la clase de tipo primo relativo

Proposición 4.1 (Extraer y multiplicar). *Sea T de tipo primo relativo con módulo d . Para $x \equiv i \pmod{d}$,*

$$T(x) = A_i(\sigma(x)), \quad \sigma(x) = \frac{x - i}{d}, \quad A_i(y) = m_i y + c_i, \quad c_i = \frac{m_i i - r_i}{d} \in \mathbb{Z}.$$

En cifras d -ádicas, σ suprime la cifra más baja, y A_i multiplica por la unidad d -ádica m_i y suma una constante.

Demostración. Es una reescritura directa: $m_i x - r_i = m_i(x - i) + (m_i i - r_i)$, y $d \mid m_i i - r_i$. $\square$

Cada paso lee la cifra más baja, que selecciona la rama, la extrae, y transforma el resto mediante una multiplicación invertible en $\mathbb{Z}_d$. La lectura avanza exactamente una cifra por paso.

Proposición 4.2 (Nunca se escribe por abajo). *Ninguna composición no vacía de ramas de T es de la forma $x \mapsto d^j x + s$ con $j \geq 0$.*

Demostración. Una composición de $n \geq 1$ ramas tiene coeficiente M/d^n con $M = \prod m_{w_k}$ coprimo con d . Si $M/d^n = d^j$, entonces $M = d^{n+j}$ con $n + j \geq 1$, lo que contradice $\gcd(M, d) = 1$. $\square$

En un programa FRACTRAN de módulo m , las multiplicaciones por primos que dividen a m actúan como escrituras: aumentan valuaciones que el programa lee después a través de los restos. La Proposición 4.2 dice que en la clase de tipo primo relativo no hay escrituras de ese tipo en la base d , ni siquiera combinando varias ramas.

Proposición 4.3 (Lectura en un solo sentido). *Para cada $n, k \geq 0$, la aplicación*

$$x \bmod d^{n+k} \longmapsto (\text{primeros } n \text{ términos del itinerario de } x, T^n(x) \bmod d^k)$$

es una biyección entre $\mathbb{Z}/d^{n+k}\mathbb{Z}$ y $\{0, \dots, d-1\}^n \times \mathbb{Z}/d^k\mathbb{Z}$.

Demostración. Por el Lema 5.3 del escrito II, los x con un prefijo de itinerario w de longitud n forman una clase $r_w + d^n\mathbb{Z}_d$, y T^n la aplica afínmente sobre $\mathbb{Z}_d$ mediante $r_w + d^n y \mapsto M_w y + s_w$ con M_w unidad. Así, $T^n(x) \bmod d^k$ determina $y \bmod d^k$ y recíprocamente, es decir, determina $x \bmod d^{n+k}$ dentro de la clase de w . $\square$

La información que la máquina lee en los pasos $n, n+1, \dots, n+k-1$ es una transformación biyectiva de las cifras de x en las posiciones $n, \dots, n+k-1$. La máquina nunca vuelve a leer información que ya ha consumido: el cabezal avanza en un solo sentido sobre la escritura d -ádica, mientras que las multiplicaciones por unidades reescriben globalmente las cifras que quedan por leer.

Observación 4.4 (Lo que el modelo excluye y lo que no). Una máquina de Turing necesita mover el cabezal en ambos sentidos, o, en los modelos de pilas y contadores, escribir y leer de nuevo. El modelo de las Proposiciones 4.1–4.3 no permite releer ni escribir por abajo. Lo único que puede transportar información desde las cifras altas hacia la zona de lectura es la reescritura global por unidades, a través de los acarreo. Por eso una función universal de tipo primo relativo exigiría que las multiplicaciones por unidades, combinadas con la extracción de cifras, sean capaces de transportar información de forma controlada. El trabajo de Kari [4, 5] muestra que estas multiplicaciones son extremadamente ricas en generación de patrones; la generación de patrones es necesaria para la universalidad, pero no suficiente, y no conocemos ningún resultado que la convierta en computación.

5. Estado de la pregunta

Lectura fuerte. Respondida negativamente: la conservación de la medida no obliga a la decidibilidad (Teorema 2.2). La razón estructural es que los enteros son un conjunto numerable de medida nula dentro de $\mathbb{Z}_d$ (Proposición 2.1), el mismo papel que desempeñan las configuraciones finitas en los autómatas celulares universales que conservan la medida.

Lectura específica. Abierta. Se sabe que una función universal de tipo primo relativo debería:

1. estar en régimen mixto (Corolario 3.2); para $d = 2$, pertenecer a la familia $qx + r$ (Corolario 3.4);
2. computar sin secciones de origen único (escrito II), sin escrituras por abajo en ninguna composición de ramas (Proposición 4.2) y con lectura en un solo sentido (Proposición 4.3);
3. transportar información únicamente mediante los acarreos de multiplicaciones por unidades d -ádicas.

Ninguna de estas condiciones es, por lo que sabemos, incompatible con la universalidad, y ninguna construcción conocida las satisface todas.

Problema 5.1 (Problema central, reformulado). *¿Existe un mecanismo de computación universal basado solo en extraer cifras d -ádicas y multiplicar por unidades d -ádicas? Equivalentemente, ¿contiene la clase de tipo primo relativo alguna función universal?*

Problema 5.2. *Para $d = 2$: ¿es decidible el problema de alcanzabilidad para toda función de la familia del Corolario 3.4?*

Problema 5.3. *¿Puede una función de tipo primo relativo simular una máquina de un solo contador, o un autómata con pila, de modo que su problema de alcanzabilidad codifique el de esos modelos? Estos modelos no son universales, pero una simulación de este tipo mostraría que la extracción de cifras con multiplicación por unidades puede almacenar y recuperar información no acotada.*

Observación 5.4. Una respuesta negativa al problema central haría decidible la alcanzabilidad para la función T de Collatz, pero no resolvería la conjetura, que es un enunciado Π_2^0 sobre una función fija. Una respuesta positiva requeriría un mecanismo de computación nuevo, distinto de la codificación por exponentes primos de Conway, y probablemente conectado con los problemas abiertos sobre las potencias de $3/2$ [6, 4].

Referencias

- [1] M. Cerdá Bennassar, *Collatz e indecidibilidad. I. Estado de la cuestión y preguntas abiertas*, septiembre de 2026.
- [2] M. Cerdá Bennassar, *Collatz e indecidibilidad. II. Secciones de origen único y funciones de tipo primo relativo*, septiembre de 2026.
- [3] G. A. Hedlund, Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system, *Mathematical Systems Theory* 3 (1969), 320–375.
- [4] J. Kari, Cellular automata, the Collatz conjecture and powers of $3/2$, en *Developments in Language Theory (DLT 2012)*, Lecture Notes in Computer Science 7410, Springer, 2012, 40–49.
- [5] J. Kari y J. Kopra, Cellular automata and powers of p/q , *RAIRO – Theoretical Informatics and Applications* 51(4) (2017), 191–204.
- [6] K. Mahler, An unsolved problem on the powers of $3/2$, *Journal of the Australian Mathematical Society* 8(2) (1968), 313–321.
- [7] K. Morita y M. Harao, Computation universality of one-dimensional reversible (injective) cellular automata, *Transactions of the IEICE* E72 (1989), 758–762.