

Collatz e indecidibilidad

VII. Equidistribución de los numeradores de ciclo: demostración, rango explícito y la barrera del cero

Miguel Cerdá Bennassar

Septiembre de 2026

Resumen

El escrito VI demostró que los numeradores $\varphi(s)$ de las palabras de paridades se equidistribuyen módulo un primo fijo $p \geq 5$ cuando no se fija el número de pasos impares, y conjeturó lo mismo fijándolo (Conjetura 4.3). Este escrito demuestra esa conjetura con una cota explícita (Teorema 5.1): para todo primo $p \geq 5$, toda longitud K y todo número o de pasos impares con $0 < o < K$, la proporción de palabras con $\varphi(s) \equiv a \pmod{p}$ difiere de $1/p$ en a lo sumo $\sqrt{2pK} \exp(-0,4q(1-q)(K-1)/p^2)$, con $q = o/K$. La demostración combina una inclinación de la medida, un análisis de Fourier en dos variables y una contracción explícita en dos pasos consecutivos. Como consecuencias, se resuelven los Problemas 7.1 y 7.3 del escrito VI. Un lema de duplicación permite además agrupar los pasos en bloques de longitud $\lceil \log_2 p \rceil$ y sustituir la pérdida p^2 por una del orden de $(\log p)^4$ (Teorema 5.2), lo que da equidistribución uniforme para primos que crecen con K hasta tamaño $\exp(cK^{1/5})$ y resuelve el Problema 7.2 en ese rango subexponencial. Los cálculos numéricos sugieren que la contracción real es todavía mejor, del orden de $1 - c/\log p$, lo que extendería el rango a $\exp(c\sqrt{K})$. Finalmente, se explica por qué la equidistribución uniforme deja de ser el marco adecuado en el régimen que decide la existencia de ciclos largos, en el que hay menos palabras que restos, y se reformula ese régimen como un problema de evitar el cero.

1. Introducción

Seguimos la notación de los escritos V y VI [2, 3]. Para una palabra $s \in \{0, 1\}^K$, el numerador $\varphi(s)$ se define por $\varphi(\emptyset) = 0$, $\varphi(s0) = \varphi(s)$ y $\varphi(s1) = 3\varphi(s) + 2^{|s|}$, y $o(s)$ denota el número de unos. Para un primo p , un resto $a \in \mathbb{F}_p$ y $0 \leq o \leq K$, sea

$$N_a(K, o) = \#\{s \in \{0, 1\}^K : o(s) = o, \varphi(s) \equiv a \pmod{p}\}.$$

El escrito VI planteó tres preguntas: demostrar que $N_a(K, o)/\binom{K}{o} \rightarrow 1/p$ para p fijo (Problema 7.1); extender el resultado a primos que crecen con K (Problema 7.2); y decidir si hay primos para los que la equidistribución falle de forma persistente (Problema 7.3). Este escrito resuelve la primera y la tercera, y la segunda hasta primos de tamaño $\exp(cK^{1/5})$.

2. Inclinación y representación de Fourier

Fijamos un primo $p \geq 5$ y un parámetro $q \in (0, 1)$. Sea P_q la medida sobre $\{0, 1\}^K$ que elige las letras de forma independiente, cada una igual a 1 con probabilidad q .

Lema 2.1 (Inclinación). *Para todo $q \in (0, 1)$ y todo $0 \leq o \leq K$,*

$$\frac{N_a(K, o)}{\binom{K}{o}} = \frac{P_q(\varphi(s) \equiv a, o(s) = o)}{P_q(o(s) = o)}.$$

Demostración. $P_q(s) = q^{o(s)}(1-q)^{K-o(s)}$ depende solo de $o(s)$, luego la medida P_q condicionada a $o(s) = o$ es la uniforme sobre las palabras con o unos. $\square$

Sea V el espacio de funciones $f: \mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{C}$ con la norma $\|f\|^2 = \sum_x |f(x)|^2$, y sea $V_0 = \{f \in V : \sum_x f(x) = 0\}$. Para $\ell \geq 0$ sean

$$g_\ell(x) = 3x + 2^\ell, \quad (B_\ell f)(x) = f(g_\ell(x)), \quad Q_\ell(\theta) = (1-q)I + qe^{i\theta}B_\ell.$$

Como 3 es invertible módulo p , g_ℓ es una biyección de $\mathbb{F}_p$ y B_ℓ es unitario. Además B_ℓ conserva las constantes y V_0 , y por tanto también lo hace $Q_\ell(\theta)$.

Lema 2.2 (Representación). *Sea X_K el resto de $\varphi(s)$ módulo p y $O_K = o(s)$. Para toda $f \in V$ y todo $\theta \in \mathbb{R}$,*

$$E_q[f(X_K)e^{i\theta O_K}] = (Q_0(\theta)Q_1(\theta)\cdots Q_{K-1}(\theta)f)(0).$$

Demostración. Sea X_L el resto de $\varphi(s_1 \cdots s_L)$ y O_L el número de unos entre las L primeras letras. Definimos $h_L(x) = E_q[f(X_K)e^{i\theta(O_K-O_L)} \mid X_L = x]$. Entonces $h_K = f$ y, condicionando sobre la letra s_{L+1} , que vale 0 (y deja X igual) con probabilidad $1-q$ o vale 1 (y aplica g_L) con probabilidad q , se obtiene $h_L = Q_L(\theta)h_{L+1}$. Como $X_0 = 0$ y $O_0 = 0$, el valor buscado es $h_0(0)$. $\square$

Sean $e_t(x) = \exp(2\pi i tx/p)$ para $t \in \mathbb{F}_p$. Usando $\mathbf{1}\{x = a\} = \frac{1}{p} \sum_t e_t(x-a)$ y $\mathbf{1}\{O_K = o\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta(O_K-o)} d\theta$, el Lema 2.2 da

$$P_q(X_K = a, O_K = o) = \frac{1}{p} P_q(O_K = o) + \frac{1}{p} \sum_{t \neq 0} e_t(-a) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta o} (Q_0 \cdots Q_{K-1} e_t)(0) d\theta. \quad (1)$$

El primer término es el principal. Para $t \neq 0$, la función e_t pertenece a V_0 , y basta controlar la norma del producto de operadores sobre V_0 .

3. Contracción en dos pasos

Lema 3.1. *Si U es unitario y $u \in V$, entonces*

$$\|(1-q)u + qUu\|^2 = \|u\|^2 - q(1-q)\|Uu - u\|^2.$$

Demostración. Desarrollando, $\|(1-q)u + qUu\|^2 = ((1-q)^2 + q^2)\|u\|^2 + 2q(1-q)\operatorname{Re}\langle Uu, u \rangle$, y $\|Uu - u\|^2 = 2\|u\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle Uu, u \rangle$. $\square$

Lema 3.2. *Sea $c \in \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$ y $(\tau_c f)(x) = f(x+c)$. Para toda $f \in V_0$,*

$$\|\tau_c f - f\| \geq 2 \sin(\pi/p) \|f\| \geq \frac{4}{p} \|f\|.$$

Demostración. En la base ortonormal $e_t/\sqrt{p}$, τ_c es diagonal con autovalores $e_t(c)$, y $f \in V_0$ no tiene componente en $t = 0$. Para $t \neq 0$, tc recorre los restos no nulos y $|e_t(c) - 1| = 2|\sin(\pi tc/p)| \geq 2 \sin(\pi/p)$. Finalmente, $\sin x \geq 2x/\pi$ en $[0, \pi/2]$. $\square$

Proposición 3.3 (Contracción en dos pasos). *Para todo $\ell \geq 0$, todo $\theta \in \mathbb{R}$ y toda $f \in V_0$,*

$$\|Q_\ell(\theta)Q_{\ell+1}(\theta)f\|^2 \leq \left(1 - \frac{1,6q(1-q)}{p^2}\right)\|f\|^2.$$

Demostración. Podemos suponer $\|f\| = 1$. Sean $A = e^{i\theta} B_{\ell+1}$ y $C = e^{i\theta} B_\ell$, unitarios, y $u = Q_{\ell+1}f = (1-q)f + qAf$. Sean $\delta_1 = \|Af - f\|$ y $\delta_0 = \|Cu - u\|$. Aplicando dos veces el Lema 3.1,

$$\|Q_\ell Q_{\ell+1}f\|^2 = \|u\|^2 - q(1-q)\delta_0^2 = 1 - q(1-q)(\delta_1^2 + \delta_0^2).$$

Como $u - f = q(Af - f)$, se tiene $\|u - f\| \leq \delta_1$, y por la desigualdad triangular

$$\|Cf - f\| \leq \|C(f - u)\| + \|Cu - u\| + \|u - f\| \leq 2\delta_1 + \delta_0.$$

El operador $C^{-1}A = B_\ell^{-1}B_{\ell+1}$ es la traslación τ_{2^ℓ} , pues $g_{\ell+1}(g_\ell^{-1}(x)) = x + 2^\ell$, y $2^\ell \not\equiv 0 \pmod{p}$. Así,

$$\begin{aligned} \|\tau_{2^\ell}f - f\| &= \|C^{-1}Af - f\| \leq \|C^{-1}(Af - f)\| + \|C^{-1}f - f\| \\ &= \delta_1 + \|f - Cf\| \leq 3\delta_1 + \delta_0. \end{aligned}$$

Por el Lema 3.2, $3\delta_1 + \delta_0 \geq 4/p$, y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\delta_1^2 + \delta_0^2 \geq \frac{(3\delta_1 + \delta_0)^2}{10} \geq \frac{1,6}{p^2}.$$

□

4. Contracción en bloques de longitud logarítmica

La cota de la Proposición 3.3 pierde un factor p^2 porque usa una sola traslación, y un carácter de frecuencia t puede apenas sentirla. Con varias traslaciones consecutivas eso ya no ocurre. Escribimos $\|y\|_{\mathbb{Z}}$ para la distancia de un real y al entero más cercano.

Lema 4.1 (Duplicación). *Sea $p \geq 5$ primo y $r = \lceil \log_2 p \rceil$. Para todo $t \in \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$ y todo $\ell \geq 0$ existe $j \in \{0, 1, \dots, r-2\}$ tal que*

$$\left\| \frac{t 2^{\ell+j}}{p} \right\|_{\mathbb{Z}} \geq \frac{1}{4}.$$

Demostración. Sea $y = t 2^\ell / p$. Como $p \nmid t 2^\ell$, se tiene $\|y\|_{\mathbb{Z}} \geq 1/p$. Si $\|z\|_{\mathbb{Z}} < 1/4$, entonces $\|2z\|_{\mathbb{Z}} = 2\|z\|_{\mathbb{Z}}$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $\|2^j y\|_{\mathbb{Z}} < 1/4$ para todo $0 \leq j \leq r-2$. Aplicando la observación anterior a $z = y, 2y, \dots, 2^{r-3}y$,

$$\|2^{r-2}y\|_{\mathbb{Z}} = 2^{r-2}\|y\|_{\mathbb{Z}} \geq \frac{2^{r-2}}{p} \geq \frac{1}{4},$$

porque $2^r \geq p$ por la definición de r . Esto contradice la hipótesis para $j = r-2$. □

Proposición 4.2 (Contracción en bloques). *Sea $p \geq 5$ primo, $r = \lceil \log_2 p \rceil$ y $\kappa = q(1-q)$. Para todo $\ell \geq 0$, todo θ y toda $f \in V_0$,*

$$\|Q_\ell(\theta) Q_{\ell+1}(\theta) \cdots Q_{\ell+r-1}(\theta) f\|^2 \leq \left(1 - \frac{\kappa}{2(r-1)(2r+1)^2}\right) \|f\|^2.$$

Demostración. Supongamos $\|f\| = 1$ y sea η tal que el primer miembro vale $1 - \eta$. Aplicamos los factores de derecha a izquierda: $v_0 = f$ y $v_{k+1} = Q_{\ell+r-1-k} v_k$ para $0 \leq k < r$, con $C_k = e^{i\theta} B_{\ell+r-1-k}$ y $\delta_k = \|C_k v_k - v_k\|$. Por el Lema 3.1, $\|v_r\|^2 = 1 - \kappa \sum_k \delta_k^2$, luego $\sum_k \delta_k^2 = \eta/\kappa$ y cada $\delta_k \leq \sqrt{\eta/\kappa}$. Como $v_{k+1} - v_k = q(C_k v_k - v_k)$, se tiene $\|v_k - f\| \leq \sum_{n < k} \delta_n \leq r\sqrt{\eta/\kappa}$, y

$$\|C_k f - f\| \leq 2\|v_k - f\| + \delta_k \leq (2r+1)\sqrt{\eta/\kappa}.$$

Para $0 \leq k \leq r-2$, el operador $C_{k+1}^{-1}C_k = B_{\ell+r-2-k}^{-1}B_{\ell+r-1-k}$ es la traslación por $2^{\ell+r-2-k}$ (como en la demostración de la Proposición 3.3), de modo que

$$\|\tau_{2^{\ell+r-2-k}}f - f\| \leq \|C_k f - f\| + \|C_{k+1}f - f\| \leq 2(2r+1)\sqrt{\eta/\kappa}.$$

Así se obtienen las $r-1$ traslaciones por $2^{\ell+j}$, $0 \leq j \leq r-2$. Sumando sus cuadrados y usando la identidad de Parseval en la base ortonormal $e_t/\sqrt{p}$, con $\hat{f}(t) = \langle f, e_t \rangle/\sqrt{p}$,

$$\sum_{j=0}^{r-2} \|\tau_{2^{\ell+j}}f - f\|^2 = \sum_{t \neq 0} |\hat{f}(t)|^2 \sum_{j=0}^{r-2} |e_t(2^{\ell+j}) - 1|^2 \geq 2,$$

porque, por el Lema 4.1, para cada $t \neq 0$ algún sumando interior cumple

$$|e_t(2^{\ell+j}) - 1| = 2 \left| \sin \frac{\pi t 2^{\ell+j}}{p} \right| \geq 2 \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2},$$

y $\sum_{t \neq 0} |\hat{f}(t)|^2 = 1$. Comparando con la cota anterior, $2 \leq (r-1) \cdot 4(2r+1)^2 \eta/\kappa$. $\square$

5. El teorema principal

Teorema 5.1. *Sea $p \geq 5$ primo, $K \geq 2$, $0 < o < K$ y $q = o/K$. Para todo $a \in \mathbb{F}_p$,*

$$\left| \frac{N_a(K, o)}{\binom{K}{o}} - \frac{1}{p} \right| \leq \sqrt{2pK} \exp\left(-\frac{0,4 q(1-q)(K-1)}{p^2}\right).$$

Demostración. Por la Proposición 3.3, agrupando los K factores en $\lfloor K/2 \rfloor$ pares consecutivos y acotando los restantes por 1, la norma de $Q_0 \cdots Q_{K-1}$ sobre V_0 es a lo sumo $\beta^{\lfloor K/2 \rfloor}$ con $\beta = (1 - 1,6 q(1-q)/p^2)^{1/2}$. Como $\|e_t\| = \sqrt{p}$ y $|h(0)| \leq \|h\|$, cada integrando de (1) está acotado por $\sqrt{p} \beta^{\lfloor K/2 \rfloor}$, y

$$\left| P_q(X_K = a, O_K = o) - \frac{1}{p} P_q(O_K = o) \right| \leq \frac{p-1}{p} \sqrt{p} \beta^{\lfloor K/2 \rfloor} \leq \sqrt{p} \exp\left(-\frac{0,8 q(1-q)\lfloor K/2 \rfloor}{p^2}\right),$$

usando $1 - x \leq e^{-x}$. Con $q = o/K$, la cota clásica $\binom{n}{k} \geq 2^{nH(k/n)}/\sqrt{8k(n-k)/n}$ [7] da

$$P_q(O_K = o) = \binom{K}{o} q^o (1-q)^{K-o} \geq \frac{1}{\sqrt{8 o(K-o)/K}} \geq \frac{1}{\sqrt{2K}}.$$

Dividiendo, aplicando el Lema 2.1 y usando $\lfloor K/2 \rfloor \geq (K-1)/2$ se obtiene la cota. $\square$

Teorema 5.2 (Versión por bloques). *Sea $p \geq 5$ primo, $r = \lceil \log_2 p \rceil$, $K \geq 2$, $0 < o < K$, $q = o/K$ y $\kappa = q(1-q)$. Para todo $a \in \mathbb{F}_p$,*

$$\left| \frac{N_a(K, o)}{\binom{K}{o}} - \frac{1}{p} \right| \leq \sqrt{2pK} \exp\left(-\frac{\kappa \lfloor K/r \rfloor}{4(r-1)(2r+1)^2}\right).$$

Demostración. Es la demostración del Teorema 5.1, agrupando los factores en $\lfloor K/r \rfloor$ bloques de r pasos consecutivos y usando la Proposición 4.2 en lugar de la Proposición 3.3: cada bloque multiplica la norma sobre V_0 por a lo sumo $(1 - \eta)^{1/2} \leq e^{-\eta/2}$, con $\eta = \kappa/(2(r-1)(2r+1)^2)$. $\square$

El Teorema 5.1 tiene constantes más limpias y es mejor para primos muy pequeños; el Teorema 5.2 es muy superior cuando p crece, porque sustituye la pérdida p^2 por una pérdida del orden de $(\log p)^4$.

6. Consecuencias

Corolario 6.1 (Primos fijos: Problema 7.1 del escrito VI). *Sea $p \geq 5$ primo y sea $J \subset (0, 1)$ compacto. Entonces $N_a(K, o)/\binom{K}{o} \rightarrow 1/p$ exponencialmente en K , uniformemente en $a \in \mathbb{F}_p$ y en los o con $o/K \in J$. En particular, la Conjetura 4.3 del escrito VI es cierta, sin necesidad de suponer $(K, o) \in \Lambda_p$.*

Corolario 6.2 (Collares). *En las condiciones del Corolario 6.1, si además $p \mid 2^K - 3^o$, la proporción de collares primitivos con parámetros (K, o) cuyo numerador es divisible por p tiende a $1/p$.*

Demostración. Por la Proposición 2.2 del escrito VI, la divisibilidad por p es la misma para todas las rotaciones de una palabra, y cada collar primitivo tiene exactamente K palabras. Basta ver que las palabras no primitivas son una fracción despreciable: una palabra no primitiva es una potencia $u^{K/d}$ con $d \mid K$, $d \leq K/2$, y hay a lo sumo $\sum_{d \mid K, d \leq K/2} \binom{d}{o/K} \leq K 2^{KH(o/K)/2}$ de ellas, frente a $\binom{K}{o} \geq 2^{KH(o/K)}/\sqrt{2K}$. Como H es continua y positiva en $(0, 1)$, se tiene $H(o/K) \geq \min_J H > 0$, y el cociente entre ambas cantidades tiende a 0 exponencialmente, uniformemente en $o/K \in J$. $\square$

Corolario 6.3 (Problema 7.3 del escrito VI). *Para ningún primo fijo $p \geq 5$ falla la equidistribución de forma persistente. Los sesgos producidos por las potencias de palabras, como el del factor $1033 = 2^{10} + 3^2$ del escrito VI, desaparecen asintóticamente.*

Corolario 6.4 (Primos que crecen con K). *Sea $J \subset (0, 1)$ compacto y $\kappa = \min_{q \in J} q(1-q)$. Si $p \geq 5$ es primo y*

$$p^2 \leq \frac{0,4\kappa(K-1)}{3\log p + \log K + \lambda}$$

para algún $\lambda > 0$, entonces el error relativo $p|N_a(K, o)/\binom{K}{o} - 1/p|$ es a lo sumo $\sqrt{2}e^{-\lambda}$ para todo o con $o/K \in J$. En particular, hay equidistribución uniforme para primos de tamaño hasta $c\sqrt{K}/\log K$.

Demostración. Por el Teorema 5.1, el error relativo está acotado por $p\sqrt{2pK}e^{-X}$ con $X = 0,4\kappa(K-1)/p^2$. La condición del enunciado da

$$X \geq 3\log p + \log K + \lambda \geq \frac{3}{2}\log p + \frac{1}{2}\log K + \lambda,$$

y por tanto $p\sqrt{2pK}e^{-X} \leq \sqrt{2}e^{-\lambda}$. $\square$

Corolario 6.5 (Rango subexponencial). *Sea $J \subset (0, 1)$ compacto y $\kappa = \min_{q \in J} q(1-q)$. Sea $p \geq 11$ primo, $L = \log_2 p$ y $\lambda > 0$. Si*

$$K \geq \frac{72}{\kappa} L^4 (3\log p + \log K + \lambda + 1),$$

entonces el error relativo $p|N_a(K, o)/\binom{K}{o} - 1/p|$ es a lo sumo $\sqrt{2}e^{-\lambda}$ para todo $a \in \mathbb{F}_p$ y todo o con $o/K \in J$. En particular, existe $c > 0$, que depende de J , tal que hay equidistribución uniforme para todos los primos $11 \leq p \leq \exp(cK^{1/5})$ cuando K es suficientemente grande; para $p = 5, 7$ basta el Corolario 6.1.

Demostración. Con $r = \lceil L \rceil \leq L + 1$ y $L \geq 3$ se tiene $(r-1)(2r+1)^2 \leq L(2L+3)^2 \leq 9L^3$ y $\lfloor K/r \rfloor \geq K/(2L) - 1$. El exponente del Teorema 5.2 es, por tanto, al menos $\kappa(K/(2L) - 1)/(36L^3) \geq \kappa K/(72L^4) - 1$, y la hipótesis lo hace mayor o igual que $3\log p + \log K + \lambda \geq \frac{3}{2}\log p + \frac{1}{2}\log K + \lambda$. Como en el Corolario 6.4, esto da la cota del error relativo. Si $p \leq \exp(cK^{1/5})$, entonces $L^4(3\log p + \log K)$ es $O(c^5 K + c^4 K^{4/5} \log K)$, y la hipótesis se cumple para c pequeño y K grande. $\square$

7. La contracción real y la conexión con Chung–Diaconis–Graham

La cota de la Proposición 3.3, del orden de $1 - 0,8q(1 - q)/p^2$ por cada dos pasos, es muy pesimista. Para que una cota de $\|Q_0 Q_1\|$ sobre V_0 controle todo el producto hace falta que todos los pares consecutivos tengan la misma norma.

Lema 7.1 (Independencia de ℓ). *Para todo $\ell \geq 0$ y todo θ , los operadores $Q_\ell(\theta)Q_{\ell+1}(\theta)$ y $Q_0(\theta)Q_1(\theta)$ son unitariamente conjugados mediante un operador que conserva V_0 . En particular, tienen la misma norma sobre V_0 .*

Demostración. Sea $\lambda = 2^\ell$, $h(x) = \lambda x$ y $(Df)(x) = f(h(x))$, que es unitario y conserva V_0 . Se tiene $h \circ g_0 \circ h^{-1}(x) = \lambda(3x/\lambda + 1) = 3x + 2^\ell = g_\ell(x)$, y análogamente $h \circ g_1 \circ h^{-1} = g_{\ell+1}$. Como $(D^{-1}B_0 Df)(x) = f(h(g_0(h^{-1}(x))))$, resulta $B_\ell = D^{-1}B_0 D$ y $B_{\ell+1} = D^{-1}B_1 D$, de donde $Q_\ell Q_{\ell+1} = D^{-1}Q_0 Q_1 D$. $\square$

Así, $\rho_2(p) = \sup_\theta \|Q_0(\theta)Q_1(\theta)|_{V_0}\|$ acota la norma de cada par consecutivo, y la norma del producto completo sobre V_0 es a lo sumo $\rho_2(p)^{\lfloor K/2 \rfloor}$. Hemos comprobado numéricamente, para $p = 139$, que las normas de los pares con $\ell = 0, 1, 5, 37, 100$ coinciden hasta la décima cifra decimal.

Hemos calculado numéricamente la norma real $\rho_2(p) = \sup_\theta \|Q_0(\theta)Q_1(\theta)|_{V_0}\|$:

p	$\rho_2(p)$	$(1 - \rho_2(p)) \log p$	Cota demostrada de $1 - \rho_2(p)$
5	0,747	0,41	$7,5 \cdot 10^{-3}$
7	0,801	0,39	$3,8 \cdot 10^{-3}$
11	0,813	0,45	$1,5 \cdot 10^{-3}$
13	0,841	0,41	$1,1 \cdot 10^{-3}$
73	0,914	0,37	$3,5 \cdot 10^{-5}$
139	0,921	0,39	$9,7 \cdot 10^{-6}$
211	0,931	0,37	$4,2 \cdot 10^{-6}$
307	0,940	0,35	$2,0 \cdot 10^{-6}$
401	0,942	0,35	$1,2 \cdot 10^{-6}$
701	0,953	0,31	$3,8 \cdot 10^{-7}$
1009	0,956	0,31	$1,8 \cdot 10^{-7}$
1511	0,960	0,29	$8,2 \cdot 10^{-8}$
2003	0,962	0,29	$4,6 \cdot 10^{-8}$

Hasta $p = 401$ se ha usado $q = 0,63$ y una malla de 128 valores de θ ; para los primos mayores, $q = \log 2 / \log 3$. En todos los casos comprobados, la norma resultó independiente de θ hasta la sexta cifra decimal. El producto $(1 - \rho_2(p)) \log p$ desciende lentamente, de valores entre 0,35 y 0,45 para los primos pequeños a 0,29 para $p \approx 2000$: los datos son compatibles con un decaimiento de $1 - \rho_2(p)$ como $1 / \log p$ o ligeramente más rápido, y muy lejos de la cota demostrada, del orden de p^{-2} . Para bloques de longitud $\lceil \log_2 p \rceil$ la diferencia es aún mayor: con $p = 139$, la norma real del bloque de 8 pasos es aproximadamente 0,19, frente a la cota 0,99997 de la Proposición 4.2.

El Teorema 5.2 equivale, en promedio por paso, a una contracción del orden de $1 - c/(\log p)^4$, y de ahí el rango $\exp(cK^{1/5})$. Los datos sugieren que la verdad está mucho más cerca de $1 - c/\log p$.

Conjetura 7.2. *Existen $c > 0$ y $A \geq 1$ tales que, para todo primo $p \geq 5$ y todo q en un compacto de $(0, 1)$, $1 - \rho_2(p) \geq c/(\log p)^A$. Los datos sugieren que puede tomarse A igual o muy próximo a 1.*

Con la Conjetura 7.2, el argumento del Teorema 5.1 (con el Lema 7.1) daría un error del orden de $\sqrt{pK} \exp(-c'K/(\log p)^A)$, y por tanto equidistribución uniforme para primos de tamaño hasta $\exp(c''K^{1/(A+1)})$. El Teorema 5.2 da el exponente $1/5$; con $A = 1$ se llegaría a $1/2$.

Observación 7.3. La cadena $x \mapsto x$ o $x \mapsto 3x + 2^\ell$ pertenece a la familia de paseos aleatorios afines estudiada por Chung, Diaconis y Graham [5], quienes analizaron el paseo $x \mapsto 2x + b$ con b aleatorio módulo un entero y obtuvieron tiempos de mezcla del orden de $\log p \cdot \log \log p$ en general, y del orden de $\log p$ para casi todos los módulos. Nuestra cadena difiere en tres aspectos: el multiplicador es 3, las traslaciones 2^ℓ dependen del tiempo de forma determinista, y el número de pasos que aplican la rama no trivial está condicionado. Adaptar sus técnicas a este contexto es el camino natural para demostrar la Conjetura 7.2 o una versión más débil.

8. La barrera del cero

Los ciclos enteros de longitud grande, si existen, corresponden a pares (K, o) con $|D| = |2^K - 3^o|$ enorme, y la condición relevante es $D \mid \varphi(s)$. La equidistribución uniforme sobre todos los restos deja de ser el marco adecuado para decidir esa condición, por una razón de recuento.

Proposición 8.1. *Sea $\delta = 1 - H(\log 2/\log 3) = 0,05004\dots > 0$ y $\varepsilon = |K \log 2 - o \log 3|$. Para o/K en un entorno de $\log 2/\log 3$, el número de collares con parámetros (K, o) es $2^{(1-\delta)K}$ salvo factores subexponenciales en K , mientras que $|D| = 2^K |1 - e^{-(K \log 2 - o \log 3)}|$; en particular $|D| \asymp 2^K \varepsilon$ cuando ε está acotado, y $|D| \sim 2^K \varepsilon$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Si ε es mayor que $2^{-\delta K}$ por más que un factor polinómico en K , hay muchos menos collares que restos módulo D .*

Demostración. Es el recuento del escrito V: $\binom{K}{o} = 2^{KH(o/K)+O(\log K)}$, con H continua y $H(\log 2/\log 3) = 1 - \delta$. La expresión de $|D|$ es exacta, y $|1 - e^{-x}| \asymp |x|$ para x acotado, con $|1 - e^{-x}| \sim |x|$ cuando $x \rightarrow 0$. $\square$

Por la teoría de Baker de formas lineales en logaritmos [4], en su versión explícita para dos logaritmos [6], ε está acotado inferiormente por una potencia negativa de K , y en particular no puede ser exponencialmente pequeño, de modo que para todos los pares (K, o) suficientemente grandes hay menos collares que restos. En ese régimen no tiene sentido pedir que los numeradores se repartan uniformemente entre todos los restos: la mayoría de los restos no se alcanzan. La pregunta pertinente es otra.

Problema 8.2 (Evitar el cero). *Demostrar que, para todo par (K, o) distinto de los de los cinco ciclos conocidos y de sus potencias, el resto 0 no pertenece al conjunto $\{\varphi(s) \bmod D : s \text{ con parámetros } (K, o)\}$.*

Por los cinco ciclos conocidos entendemos las cinco órbitas periódicas de T sobre $\mathbb{Z}$, consideradas como conjuntos: $\{0\}$, $\{-1\}$, $\{1, 2\}$, $\{-5, -7, -10\}$ y el ciclo de -17 , de once elementos. Sus palabras son las de sus puntos leídos desde cada uno de ellos, es decir, las rotaciones de cinco collares primitivos, y las potencias de esas palabras generan los mismos ciclos (Proposición 3.2 del escrito VI).

La equivalencia con los ciclos es exacta en ambos sentidos. Si $D \mid \varphi(s)$, el entero $x_s = \varphi(s)/D$ es punto fijo de la composición de ramas asociada a s , y por el Lema 2.1 del escrito IV [1] (que se apoya en el Lema 5.5 del escrito II) su vector de paridades es s^∞ : en particular, sus K primeros pasos siguen exactamente la palabra s y $T^K(x_s) = x_s$. Recíprocamente, si x es un punto entero de un ciclo de T y s es la palabra de sus K primeros pasos, con $T^K(x) = x$, entonces x es el único punto fijo racional de esa composición,

$x = x_s = \varphi(s)/D$, y $D \mid \varphi(s)$. Por tanto, el Problema 8.2 es equivalente a la inexistencia de ciclos enteros de T distintos de los cinco conocidos, es decir, a la parte de la conjetura de Collatz que se refiere a ciclos, extendida a los enteros negativos. Los resultados de este escrito lo sitúan con precisión: la equidistribución resuelve la cuestión, en el sentido de una distribución uniforme, para primos pequeños frente a K , y deja intacta la pregunta de si un conjunto escaso de restos evita un valor concreto.

9. Estado de los problemas

Problema	Estado	Resultado
Escrito VI, Problema 7.1 (equidistribución con (K, o) fijado, p fijo)	Resuelto	Teorema 5.1, Corolario 6.1
Escrito VI, Problema 7.2 (primos que crecen con K)	Resuelto hasta $p \leq \exp(cK^{1/5})$	Teorema 5.2, Corolario 6.5; rango mayor bajo la Conjetura 7.2
Escrito VI, Problema 7.3 (fallos persistentes)	Resuelto: no los hay para p fijo	Corolarios 6.1 y 6.2
Contracción real	Conjetura con evidencia numérica	Conjetura 7.2
Régimen $p \approx D $	Fuera del marco de la equidistribución uniforme	Problema 8.2

Verificación. Los valores de $\rho_2(p)$ y de la norma de los bloques se han obtenido calculando normas espectrales sobre V_0 ; son estimaciones numéricas, no cotas demostradas. El Lema 4.1 se ha comprobado además exhaustivamente, para todo t y para $0 \leq \ell < 40$, en primos entre 5 y 7919. Las demostraciones de las Secciones 2 a 6 no dependen de estos cálculos.

Referencias

- [1] M. Cerdá Bennassar, *Collatz e indecidibilidad. IV. Catalan, los dos orígenes y la contracción en la iteración de Collatz*, septiembre de 2026.
- [2] M. Cerdá Bennassar, *Collatz e indecidibilidad. V. Memoria en valuaciones: la cota de borrado, los límites de la simulación de contadores y el ciclo de -17* , septiembre de 2026.
- [3] M. Cerdá Bennassar, *Collatz e indecidibilidad. VI. La divisibilidad de los numeradores de ciclo: equidistribución módulo p y el caso de 139*, septiembre de 2026.
- [4] A. Baker, *Transcendental Number Theory*, Cambridge University Press, 1975.
- [5] F. R. K. Chung, P. Diaconis y R. L. Graham, Random walks arising in random number generation, *Annals of Probability* 15 (1987), 1148–1165.
- [6] M. Laurent, M. Mignotte y Yu. Nesterenko, Formes linéaires en deux logarithmes et déterminants d’interpolation, *Journal of Number Theory* 55 (1995), 285–321.

- [7] F. J. MacWilliams y N. J. A. Sloane, *The Theory of Error-Correcting Codes*, North-Holland, 1977.