

Memorias binarias, acarreo y cierre de ciclos

Una descripción algebraica de la dinámica impar de Collatz

Miguel Cerdá Bennassar

Octubre de 2026

Resumen

Se presenta una descripción de la dinámica de Collatz mediante memorias binarias de soporte finito y episodios de reescritura y desplazamiento. La iteración impar se expresa por una identidad afín cuyo término independiente es el acarreo acumulado. Se caracteriza exactamente la clase de congruencia que realiza un perfil finito de valuaciones y se demuestra que un perfil produce una órbita periódica positiva si y solo si satisface una condición de divisibilidad con denominador positivo. Para perfiles organizados en bloques se establecen la descomposición del acarreo y una identidad telescópica de cierre, de las que se obtiene un balance exacto de contribuciones positivas y negativas. Estas fórmulas excluyen los perfiles constantes no triviales y los ciclos cuyos exponentes son todos al menos dos. El análisis conserva la dependencia respecto al orden de los bloques y no establece la ausencia general de ciclos ni la convergencia de todas las órbitas.

1. Introducción y alcance

Este escrito reúne el núcleo algebraico de *Dinámica de acarreo en memorias binarias* y *La identidad telescópica de los acarreo*. Se desarrolla como un texto independiente: todos los resultados que se utilizan se demuestran aquí.

El lenguaje de memorias permite visualizar las divisiones por dos como desplazamientos y la operación $3u + 1$ como una reescritura con acarreo. Su contenido aritmético se recoge en una identidad exacta para las iteraciones impares. Al imponer el cierre de una órbita, esa identidad se convierte en una condición de divisibilidad. La organización por bloques permite descomponer dicha condición sin perder la posición de cada contribución.

Buena parte de este núcleo es conocida. La identidad afín y la ecuación de cierre de un ciclo aparecen en Böhm y Sontacchi [1] y en la exposición de Lagarias [3]; la correspondencia entre perfiles finitos y clases de congruencia módulo una potencia de dos, con su densidad, se debe a Terras [4] y a Everett [2]. También son conocidas las desigualdades $\log_2 3 < \sigma/n \leq 2$ para los ciclos positivos y la exclusión de los ciclos sin exponentes unitarios. Se incluyen con demostración para que el texto sea autocontenido. La presentación mediante memorias, la descomposición por bloques y el balance de signos organizan esos resultados de modo que conservan la posición de cada contribución.

El objetivo es describir y verificar estas relaciones. La conjetura de Collatz exige que toda órbita positiva alcance el ciclo trivial; excluir los demás ciclos solo resolvería una parte de esa cuestión, pues todavía habría que excluir las órbitas no acotadas.

2. Memorias finitas y episodios

Definición 2.1. Una memoria binaria finita es una sucesión $m = (a_0, a_1, \dots)$, con $a_j \in \{0, 1\}$ y solo un número finito de unos. Denotamos por $\mathcal{M}_{\text{fin}}$ su conjunto y definimos

$$N(m) = \sum_{j \geq 0} a_j 2^j.$$

La memoria nula se incluye y corresponde a 0. Las memorias positivas son las distintas de ella. Una memoria es activa si $a_0 = 1$.

La aplicación N es una biyección entre $\mathcal{M}_{\text{fin}}$ y $\mathbb{N}_0$. Definimos el desplazamiento

$$S(a_0, a_1, a_2, \dots) = (a_1, a_2, \dots)$$

y la reescritura R por la suma binaria con acarreo que corresponde a

$$N(R(m)) = N(m) + 2N(m) + 1 = 3N(m) + 1.$$

Ambas operaciones preservan el soporte finito. Además,

$$N(S(m)) = \left\lfloor \frac{N(m)}{2} \right\rfloor.$$

Sobre estas memorias consideramos

$$\mathcal{T}(m) = \begin{cases} S(m), & a_0 = 0, \\ S(R(m)), & a_0 = 1. \end{cases}$$

Proposición 2.2. *Bajo la identificación N , la transformación $\mathcal{T}$ corresponde al mapa*

$$H(n) = \begin{cases} n/2, & n \text{ par}, \\ (3n+1)/2, & n \text{ impar}. \end{cases}$$

En los enteros positivos, su ciclo trivial es $1 \mapsto 2 \mapsto 1$.

Demostración. Si $a_0 = 0$, el desplazamiento divide exactamente por dos. Si $a_0 = 1$, la reescritura tiene cabeza cero, ya que $3N(m) + 1$ es par; el desplazamiento posterior vuelve a ser una división exacta por dos. Las imágenes de 1 y 2 se calculan directamente. $\square$

Para un entero impar positivo u , escribimos

$$\ell(u) = \nu_2(3u + 1), \quad F(u) = \frac{3u + 1}{2^{\ell(u)}}.$$

Un episodio consiste en una reescritura seguida de los $\ell(u)$ desplazamientos que eliminan los ceros iniciales hasta la siguiente memoria activa. Por tanto, su mapa de retorno es F , y $F(1) = 1$.

La aplicación clásica de Collatz realiza $u \mapsto 3u + 1$ y luego todas las divisiones por dos. El mapa H incorpora la primera división al paso impar, mientras que F incorpora todas ellas. Los tres mapas tienen la misma sucesión de estados impares; su llegada al ciclo trivial es equivalente.

3. La identidad afín del acarreo

Fijado un impar positivo u_0 , ponemos

$$u_{k+1} = F(u_k), \quad \ell_k = \nu_2(3u_k + 1), \quad D_k = \sum_{j=0}^{k-1} \ell_j, \quad D_0 = 0.$$

Teorema 3.1 (véase [3]). *Para todo $k \geq 0$ se tiene*

$$2^{D_k} u_k = 3^k u_0 + c_k, \quad (1)$$

donde

$$c_0 = 0, \quad c_{k+1} = 3c_k + 2^{D_k}, \quad c_k = \sum_{j=0}^{k-1} 3^{k-1-j} 2^{D_j} \quad (k \geq 1). \quad (2)$$

En particular, c_k es positivo e impar para $k \geq 1$.

Demostración. La fórmula para $k = 0$ es inmediata. Multiplicando $2^{\ell_k} u_{k+1} = 3u_k + 1$ por 2^{D_k} y usando (1), resulta

$$2^{D_{k+1}} u_{k+1} = 3^{k+1} u_0 + 3c_k + 2^{D_k}.$$

Esto demuestra la recurrencia y, por expansión, la suma explícita. En esta suma el término $j = 0$ es impar y todos los demás son pares, porque $D_j \geq j \geq 1$. $\square$

Corolario 3.2. *La longitud del episodio siguiente satisface*

$$\ell_k = \nu_2(3^{k+1} u_0 + c_{k+1}) - D_k.$$

Demostración. La expresión dentro de la valuación es $2^{D_k}(3u_k + 1)$. $\square$

Observación 3.3. El acarreo depende del perfil anterior de longitudes. La recurrencia de c_k utiliza D_k , y la determinación del siguiente exponente sigue utilizando la órbita, o equivalentemente la fórmula del corolario con u_0 . El hecho de que la memoria inicial tenga soporte finito no elimina el término $3^k u_0$ de (1).

Ejemplo 3.4. La trayectoria impar que comienza en 7 ofrece la comprobación siguiente:

k	u_k	ℓ_k	D_k	c_k
0	7	1	0	0
1	11	1	1	1
2	17	2	2	5
3	13	3	4	19
4	5	4	7	73
5	1	2	11	347

Por ejemplo, en el último renglón $2^{11} \cdot 1 = 3^5 \cdot 7 + 347$.

4. Perfiles finitos y precisión binaria

Definición 4.1. Un perfil de longitud $n \geq 1$ es una lista $\ell = (\ell_0, \dots, \ell_{n-1})$ de enteros positivos. Sus sumas parciales D_j y su acarreo c_n se definen por (2), aunque todavía no se haya elegido una órbita. Escribimos $\sigma = D_n$.

Teorema 4.2 (Terras [4], Everett [2]). *Para cada perfil existe exactamente una clase impar módulo $2^{\sigma+1}$ cuyos representantes positivos realizan ese perfil en sus primeros n episodios. Esa clase está caracterizada por*

$$3^n u_0 + c_n \equiv 2^\sigma \pmod{2^{\sigma+1}}. \quad (3)$$

Demostración. Para un episodio de longitud ℓ , la condición es $3u + 1 \equiv 2^\ell \pmod{2^{\ell+1}}$. Como 3 es invertible módulo una potencia de dos, determina una clase impar única.

Procedemos por inducción para varios episodios. Sea $S = \ell_1 + \dots + \ell_{n-1}$. El perfil restante determina una clase impar a módulo 2^{S+1} para el siguiente estado v . La relación $3u + 1 = 2^{\ell_0} v$ exige

$$3u + 1 \equiv 2^{\ell_0} a \pmod{2^{\ell_0+S+1}}.$$

Esta congruencia tiene una única solución para u . Cada representante positivo de ella tiene valuación inicial exactamente ℓ_0 , y su siguiente estado pertenece a la clase a , de modo que realiza el resto del perfil. Esto prueba la existencia y unicidad.

Para cualquier representante que realiza el perfil, (1) y la imparidad de u_n dan (3). Esta última congruencia también tiene una solución única, al ser 3^n invertible; por tanto es precisamente la clase construida. $\square$

Corolario 4.3. *La densidad natural de los inicios que realizan el perfil es $2^{-(\sigma+1)}$ entre todos los enteros positivos y $2^{-\sigma}$ entre los impares positivos. En particular, la proporción de impares con $\ell(u) = r$ es 2^{-r} para $r \geq 1$.*

Demostración. Una clase módulo $2^{\sigma+1}$ tiene densidad $2^{-(\sigma+1)}$ y está enteramente formada por impares. $\square$

Observación 4.4. Si la precisión necesaria se mide exigiendo que *todos* los impares positivos congruentes con u_0 realicen el mismo perfil, el mínimo número de bits para $n \geq 1$ es exactamente $\sigma + 1$. La suficiencia es el teorema. Para la necesidad, $u_0 + 2^\sigma$ conserva los residuos módulo 2^d para $d \leq \sigma$, pero cambia el lado izquierdo de (3) en un múltiplo impar de 2^σ y deja de realizar el perfil.

Esta precisión se refiere a una clase de posibles inicios; conocer de antemano el entero u_0 completo es una información distinta. Las densidades anteriores describen los inicios, y no demuestran frecuencias temporales en una órbita particular.

5. Cierre y divisibilidad

Para un perfil de longitud n definimos

$$\delta = 2^\sigma - 3^n.$$

Este entero es impar, coprimo con 3 y distinto de cero. Si una órbita realiza el perfil y vuelve a u_0 , la identidad afín exige

$$\delta u_0 = c_n. \quad (4)$$

Para probar también la suficiencia, debemos justificar las valuaciones sin suponer previamente la existencia del ciclo.

Lema 5.1. *Sea C_k el acarreo del perfil rotado que comienza en ℓ_k , con índices interpretados módulo n . Entonces*

$$2^{\ell_k} C_{k+1} = 3C_k + \delta. \quad (5)$$

Además, $\nu_2(3C_k + \delta) = \ell_k$.

Demostración. En la suma de $3C_k$, el primer término es 3^n . Se cancela con el término -3^n de δ . Los restantes términos coinciden con los de $2^{\ell_k} C_{k+1}$: el último término de esta última suma es 2^σ . Esto prueba (5), también cuando $n = 1$. Cada C_{k+1} es impar por el Teorema 3.1, cuya afirmación sobre la suma es válida para cualquier perfil. La valuación es por tanto exactamente ℓ_k . $\square$

Teorema 5.2 (véanse [1, 3]). *Un perfil produce una órbita periódica de enteros impares positivos que vuelve al inicio después de n episodios si y solo si*

$$\delta > 0 \quad y \quad \delta \mid c_n. \quad (6)$$

En ese caso, $u_0 = c_n/\delta$. El período mínimo puede ser un divisor de n .

Demostración. La necesidad se sigue de (4), pues $c_n > 0$ y $u_0 > 0$.

Para la suficiencia, supongamos (6). Como $C_0 = c_n$ y δ es impar, $u_0 = C_0/\delta$ es un entero impar positivo. Si $\delta \mid C_k$, la identidad (5) y $\gcd(\delta, 2) = 1$ implican $\delta \mid C_{k+1}$. Por inducción todos los cocientes $u_k = C_k/\delta$ son enteros impares positivos. La misma identidad da

$$3u_k + 1 = 2^{\ell_k} u_{k+1},$$

con u_{k+1} impar; por ello la valuación es exactamente ℓ_k y el paso coincide con F . Finalmente, $C_n = C_0$, luego $u_n = u_0$. $\square$

Corolario 5.3. *Todo ciclo positivo satisface $\sigma/n > \log_2 3$. Además, la divisibilidad del criterio es invariante bajo rotación del perfil.*

Demostración. La primera afirmación equivale a $\delta > 0$. La segunda se sigue de (5) y de la invertibilidad de 2 módulo δ . $\square$

Observación 5.4. La ecuación de cierre asocia a cada perfil un candidato racional único. Cuando $\delta > 0$, los cocientes racionales C_k/δ son positivos y satisfacen las relaciones afines con las valuaciones prescritas, entendiendo $\nu_2(a/b) = \nu_2(a) - \nu_2(b)$. La cuestión para un ciclo de enteros es su integridad, caracterizada por el teorema. Esta caracterización no resuelve por sí sola la divisibilidad para todos los perfiles.

6. Cotas y balance de magnitud

Proposición 6.1. *Para un perfil de longitud n y suma σ se tiene*

$$3^n - 2^n \leq c_n \leq 2^{\sigma-n} (3^n - 2^n).$$

Demostración. Como todos los exponentes son positivos, $j \leq D_j \leq \sigma - (n - j)$. Sustituyendo ambas cotas en la suma de c_n , se obtiene la afirmación mediante

$$\sum_{j=0}^{n-1} 3^{n-1-j} 2^j = 3^n - 2^n.$$

□

Estas cotas son estimaciones del acarreo; su uso como obstrucción exige una comparación efectiva con δ .

Proposición 6.2. *A lo largo de cualquier órbita impar positiva,*

$$\log_2 \frac{u_k}{u_0} = k \log_2 3 - D_k + \sum_{j=0}^{k-1} \log_2 \left(1 + \frac{1}{3u_j} \right). \quad (7)$$

Para una órbita periódica de longitud n ,

$$\frac{\sigma}{n} = \log_2 3 + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log_2 \left(1 + \frac{1}{3u_j} \right) \leq 2,$$

con igualdad únicamente para la órbita constante $u_j = 1$.

Demostración. Cada paso satisface

$$\frac{u_{j+1}}{u_j} = \frac{3}{2^{\ell_j}} \left(1 + \frac{1}{3u_j} \right).$$

Tomando logaritmos y sumando resulta (7). En un ciclo el lado izquierdo es cero. Como $u_j \geq 1$, cada término corrector es positivo y a lo sumo $\log_2(4/3)$. La igualdad exige $u_j = 1$ para todo j . □

Observación 6.3. La corrección positiva de (7) debe conservarse en los argumentos sobre crecimiento. La irracionalidad de $\log_2 3$ impide que coincida con una media racional finita, pero permite que medias racionales converjan a él; tampoco proporciona por sí sola una cota cuantitativa sobre esa aproximación.

7. Descomposición por bloques e identidad telescópica

Escribimos un perfil como concatenación de q bloques constantes:

$$(\lambda_0^{m_0}, \lambda_1^{m_1}, \dots, \lambda_{q-1}^{m_{q-1}}), \quad m_i \geq 1, \quad \lambda_i \geq 1.$$

Aquí $\lambda_i^{m_i}$ significa m_i repeticiones de λ_i . Los bloques pueden elegirse máximos, aunque las identidades no lo requieren. Definimos

$$n = \sum_i m_i, \quad \sigma = \sum_i m_i \lambda_i, \quad p_i = 2^{m_i \lambda_i}, \quad r_i = 3^{m_i}, \quad \delta_i = p_i - r_i,$$

$$A_i = \left(\prod_{j < i} p_j \right) \left(\prod_{j > i} r_j \right), \quad b_i = \frac{2^{m_i \lambda_i} - 3^{m_i}}{2^{\lambda_i} - 3}.$$

Los productos vacíos valen uno. Cada b_i es un entero positivo, pues

$$b_i = \sum_{h=0}^{m_i-1} 3^{m_i-1-h} 2^{h \lambda_i}. \quad (8)$$

Teorema 7.1. *El acarreo y el denominador de cierre admiten las descomposiciones*

$$c_n = \sum_{i=0}^{q-1} A_i b_i, \quad \delta = \sum_{i=0}^{q-1} A_i \delta_i. \quad (9)$$

Demostración. Sea $M_i = \sum_{j < i} m_j$ y $E_i = \sum_{j < i} m_j \lambda_j$. La contribución del bloque i a c_n es

$$\sum_{h=0}^{m_i-1} 3^{n-1-M_i-h} 2^{E_i+h\lambda_i} = 2^{E_i} 3^{n-M_i-m_i} b_i = A_i b_i.$$

Para la segunda identidad, consideremos

$$B_i = \left(\prod_{j < i} p_j \right) \left(\prod_{j \geq i} r_j \right) \quad (0 \leq i \leq q).$$

Entonces $B_{i+1} - B_i = A_i(p_i - r_i)$. Sumando, los términos intermedios se cancelan y queda $B_q - B_0 = \prod_j p_j - \prod_j r_j = 2^\sigma - 3^n$. $\square$

Corolario 7.2 (Balance exacto de signos). *Para cualquier perfil,*

$$c_n - \delta = S_+ - S_-,$$

donde

$$S_+ = 2 \sum_{\lambda_i=1} A_i (3^{m_i} - 2^{m_i}),$$

$$S_- = \sum_{\lambda_i \geq 3} A_i \delta_i \frac{2^{\lambda_i} - 4}{2^{\lambda_i} - 3}.$$

Ambas son cantidades racionales no negativas; los sumandos de S_- no son necesariamente enteros. Los bloques de valor dos tienen contribución directa nula a la diferencia.

Demostración. Restando las identidades de (9), obtenemos

$$c_n - \delta = \sum_i A_i \delta_i \frac{4 - 2^{\lambda_i}}{2^{\lambda_i} - 3}.$$

Para $\lambda_i = 1$ el sumando es $2A_i(3^{m_i} - 2^{m_i})$; para $\lambda_i = 2$ es cero, y para $\lambda_i \geq 3$ es negativo con el valor indicado. $\square$

Observación 7.3. Si $\delta > 0$, la condición necesaria $u_0 \geq 1$ equivale a $S_+ \geq S_-$. Cuando se da esta desigualdad, todavía se requiere $\delta \mid c_n$. Los coeficientes A_i conservan el orden de los bloques: las cantidades globales de pasos de cada tipo no determinan por sí solas el balance.

Insertar un bloque de valor dos de longitud m multiplica por 3^m los coeficientes de los bloques anteriores y por 4^m los de los posteriores. Si hay contribuciones positivas y negativas a ambos lados, no existe un factor uniforme para el cociente S_-/S_+ .

8. Consecuencias demostradas y perfiles de dos bloques

Proposición 8.1 (Perfiles constantes). *El único perfil constante que produce un ciclo positivo tiene valor $\ell = 2$ y corresponde al punto fijo 1 de F .*

Demostración. Para n repeticiones de ℓ , (8) da

$$c_n = \frac{2^{n\ell} - 3^n}{2^\ell - 3}, \quad \frac{c_n}{\delta} = \frac{1}{2^\ell - 3}.$$

Para $\ell = 1$ el cociente es -1 ; para $\ell = 2$ vale uno; para $\ell \geq 3$ está estrictamente entre cero y uno. $\square$

Proposición 8.2 (Perfiles sin exponentes unitarios). *Si todos los exponentes de un perfil son al menos dos, solo puede producir un ciclo positivo cuando todos son exactamente dos. En particular, todo ciclo positivo no trivial contiene un exponente igual a uno.*

Demostración. Cuando $\lambda_i \geq 2$, se tiene $\delta_i > 0$ y $b_i \leq \delta_i$, con igualdad exactamente si $\lambda_i = 2$. Las identidades de (9) dan $c_n \leq \delta$, con desigualdad estricta si algún exponente es al menos tres. En ese caso $u_0 < 1$. Si todos son dos, el ciclo es el punto fijo uno. $\square$

Proposición 8.3 (Dos bloques). *Para el perfil (a^s, b^t) , con $a, b, s, t \geq 1$, ponemos*

$$b_s^{(a)} = \frac{2^{sa} - 3^s}{2^a - 3}, \quad b_t^{(b)} = \frac{2^{tb} - 3^t}{2^b - 3}.$$

Entonces

$$c_{s+t} = 3^t b_s^{(a)} + 2^{sa} b_t^{(b)}, \quad (10)$$

$$(2^b - 3)c_{s+t} = \delta + (2^b - 2^a)3^t b_s^{(a)}, \quad (11)$$

donde $\delta = 2^{sa+tb} - 3^{s+t}$. Si $b > a$ y el perfil produce un ciclo positivo, es necesario que

$$\delta \mid (2^{b-a} - 1)b_s^{(a)}. \quad (12)$$

Equivalente a esta condición necesaria es

$$\frac{\delta}{\gcd(\delta, 2^{b-a} - 1)} \mid b_s^{(a)}.$$

Demostración. La primera identidad es (9) para dos bloques. Multiplicándola por $2^b - 3$ y usando $(2^a - 3)b_s^{(a)} = 2^{sa} - 3^s$ se obtiene la segunda. Si $\delta \mid c_{s+t}$, (11) implica $\delta \mid (2^b - 2^a)3^t b_s^{(a)}$. Como δ es coprimo con 2 y con 3, se pueden cancelar $2^a 3^t$ y resulta (12). La última equivalencia se obtiene dividiendo por el máximo común divisor y cancelando los factores coprimos restantes. $\square$

Observación 8.4. La condición (12) no se presenta como suficiente: para recuperar $\delta \mid c_{s+t}$ desde (11) sería necesario controlar también los factores comunes de δ y $2^b - 3$. El criterio completo sigue siendo el Teorema 5.2.

Ejemplo 8.5 (El umbral de cierre no determina el balance). El perfil $(1, 1, 3)$ tiene $n = 3$, $\sigma = 5$ y

$$\delta = 32 - 27 = 5 > 0, \quad c_3 = 9 + 6 + 4 = 19.$$

Por tanto, está estrictamente por encima del umbral $\sigma/n > \log_2 3$, pero $c_3 > \delta$. Su candidato es $19/5$, que no es entero. Así, estar por encima del umbral no implica $c_n < \delta$.

Sus rotaciones $(1, 3, 1)$ y $(3, 1, 1)$ tienen acarreo 31 y 49, respectivamente, y el mismo denominador 5. Conservan las cantidades de cada tipo de exponente, pero cambian el acarreo. Sus candidatos satisfacen exactamente

$$\frac{19}{5} \xrightarrow{\ell=1} \frac{31}{5} \xrightarrow{\ell=1} \frac{49}{5} \xrightarrow{\ell=3} \frac{19}{5},$$

donde cada flecha representa $(3u + 1)/2^\ell$. Se trata de una órbita racional, no de un ciclo de enteros positivos.

9. Qué queda abierto

Las identidades establecidas distinguen tres cuestiones:

1. La realización de un perfil finito: siempre existe una clase de inicios positivos que lo realiza, descrita por el Teorema 4.2.
2. El cierre positivo entero: exige y equivale a $\delta > 0$ y $\delta \mid c_n$, según el Teorema 5.2.
3. La convergencia de todas las órbitas: requiere excluir tanto los ciclos positivos no triviales como las órbitas no acotadas.

El balance $c_n - \delta = S_+ - S_-$ es una herramienta exacta para la segunda cuestión. Cuando $S_- > S_+$ excluye el ciclo por magnitud. Si $S_- \leq S_+$, queda por estudiar la divisibilidad. No se ha demostrado aquí una reducción general a un conjunto finito de perfiles.

En la tercera cuestión, la finitud del soporte inicial no implica que los estados posteriores permanezcan acotados. Una órbita acotada de enteros positivos es eventualmente periódica, porque tiene un número finito de estados posibles y el mapa es determinista. Una órbita no acotada requiere un argumento adicional que estas identidades, por sí solas, no proporcionan.

El contenido obtenido es una descripción algebraica verificable: los episodios de una memoria finita generan una identidad afín; el cierre se traduce en divisibilidad; y la descomposición por bloques conserva exactamente el balance y la posición de cada término. El problema pendiente es controlar esas condiciones para perfiles generales y relacionarlas con la evolución global de las órbitas.

Referencias

- [1] C. Böhm y G. Sontacchi, *On the existence of cycles of given length in integer sequences like $x_{n+1} = x_n/2$ if x_n even, and $x_{n+1} = 3x_n + 1$ otherwise*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **64** (1978), 260–264.
- [2] C. J. Everett, *Iteration of the number-theoretic function $f(2n) = n$, $f(2n + 1) = 3n + 2$* , Advances in Math. **25** (1977), 42–45.

- [3] J. C. Lagarias, *The $3x+1$ problem and its generalizations*, Amer. Math. Monthly **92** (1985), 3–23.
- [4] R. Terras, *A stopping time problem on the positive integers*, Acta Arith. **30** (1976), 241–252.