

El bloque más largo de exponentes unitarios en los ciclos de Collatz

Miguel Cerdá Bennassar

Octubre de 2026

Resumen

En un ciclo no trivial de la aplicación impar $F(u) = (3u + 1)/2^{\nu_2(3u+1)}$, con n términos, los exponentes iguales a 1 forman r bloques cíclicos máximos. Sea S' la suma de las longitudes de todos ellos salvo el más largo. Se demuestra que S' no puede ser pequeño: sin ninguna condición, $S' > 0,0869n - 1,11$, y $S' > 0,1897n - 0,814r - 1,11$. El ingrediente nuevo es una cota del acarreo, válida para cualquier número de bloques, en la que los bloques distintos del primero intervienen solo mediante el factor $(3/2)^{S'}$. Como consecuencias se recuperan los teoremas de los escritos anteriores para uno y dos bloques, y para tres bloques se obtiene que el bloque intermedio mide más de $0,0753n - 5,98$; en particular, quedan excluidos los ciclos con tres bloques cuyos dos bloques menores sumen poco. El caso general de tres bloques sigue abierto.

1. Introducción

Este escrito continúa la serie formada por [9, 1, 2, 4], cuya notación seguimos. Para un ciclo no trivial de F con n términos, perfil $(\ell_0, \dots, \ell_{n-1})$ y $\sigma = \sum \ell_j$, escribimos

$$L = \log_2 3, \quad \Lambda = \sigma \ln 2 - n \ln 3 > 0, \quad \delta = 2^\sigma - 3^n = 2^\sigma (1 - e^{-\Lambda}).$$

Los exponentes iguales a 1 forman $r \geq 1$ bloques cíclicos máximos, de longitudes $s_1, \dots, s_r$, con total $N_1 = s_1 + \dots + s_r$. Llamamos $s_{\max}$ a la mayor de esas longitudes y

$$S' = N_1 - s_{\max}$$

a la suma de las demás.

Teorema 1.1. *Para todo ciclo no trivial de F ,*

$$S' \ln 3 > a n - b \Lambda - K_1, \quad a = \ln \frac{4}{3} - \frac{L}{20}, \quad b = 1 + \frac{1}{20 \ln 2}, \quad K_1 = \ln \frac{4}{3} + \ln 1,015 + \ln 5 - \ln 2,$$

con $a = 0,20843\dots$, $b = 1,07213\dots$ y $K_1 = 1,21886\dots$

Corolario 1.2. *Para todo ciclo no trivial de F :*

1. $S' > 0,0869n - 1,11$;
2. $S' > 0,1897n - 0,814r - 1,11$.

En palabras: el bloque más largo no puede concentrar casi todos los exponentes iguales a 1; los demás bloques tienen que sumar una fracción fija de n .

2. Resultados que se utilizan

Proposición 2.1 ([1, 2]). *Para todo ciclo no trivial de F :*

1. *el inicio v de un bloque de unos de longitud s cumple $v \geq 2^{s+1} - 1$;*
2. *$\Lambda < \frac{5}{3}A$, con $A = \sum_i 2^{-s_i}$, y $\Lambda \leq n \ln \frac{10}{9}$;*
3. *$\min_i s_i < \frac{L}{20 \ln 2} n + \log_2 r + \log_2 \frac{5}{3} + \frac{1}{20(\ln 2)^2}$;*
4. *el ciclo tiene $n \geq 92$ términos.*

La segunda cota de la parte 2 se sigue de la identidad $\Lambda = \sum_j \ln(1 + 1/(3u_j))$ y de $u_j \geq 3$. La parte 4 se deduce del teorema de Hercher [7], como en [2].

Teorema 2.2 (consecuencia de Ellison [6]; véase [2]). *Para todos los enteros positivos x, y con $x > 84$, se tiene $|x \ln 2 - y \ln 3| \geq e^{-x/20}$.*

3. El acarreo empezando en un bloque

Lema 3.1. *Empecemos un ciclo no trivial en el inicio de un bloque de unos de longitud s , y sea O el número de exponentes iguales a 1 que no pertenecen a ese bloque. Entonces su acarreo $c = \sum_{j=0}^{n-1} 3^{n-1-j} 2^{D_j}$ cumple*

$$c < 3^n + 4 \left(\frac{3}{2} \right)^O 2^\sigma.$$

Demostración. Los s primeros términos suman $3^{n-s}(3^s - 2^s) < 3^n$, como en [4]. Para $j \geq s$, sean o_j y d_j el número de exponentes iguales a 1 y mayores o iguales que 2, respectivamente, en las posiciones $j, j+1, \dots, n-1$. Como $\sigma - D_j \geq o_j + 2d_j$ y $n-1-j = o_j + d_j - 1$,

$$3^{n-1-j} 2^{D_j} \leq \frac{2^\sigma}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^{o_j} \left(\frac{3}{4} \right)^{d_j}.$$

Como el perfil termina con un exponente mayor o igual que 2, se tiene $d_j \geq 1$ para todo $j \geq s$, y $o_j \leq O$. Agrupamos las posiciones $j \geq s$ según el valor $d = d_j$. Para cada $d \geq 1$ hay exactamente una posición con exponente mayor o igual que 2 y $d_j = d$, que contribuye a lo sumo $\frac{2^\sigma}{3} (3/2)^O (3/4)^d$; las posiciones con exponente 1 y $d_j = d$ forman un tramo en el que o_j toma valores consecutivos menores o iguales que O , y contribuyen menos de $\frac{2^\sigma}{3} (3/4)^d (3/2)^O \sum_{k \geq 0} (2/3)^k = \frac{2^\sigma}{3} (3/4)^d \cdot 3(3/2)^O$. Sumando sobre $d \geq 1$,

$$\sum_{j \geq s} 3^{n-1-j} 2^{D_j} < \frac{2^\sigma}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^O \cdot 4 \sum_{d \geq 1} \left(\frac{3}{4} \right)^d = 4 \left(\frac{3}{2} \right)^O 2^\sigma. \quad \square$$

4. Demostración del teorema principal

Por la Proposición 2.1, $n \geq 92$, y de $2^\sigma > 3^n$ se sigue $\sigma > nL > 84$. Empezamos el ciclo en el inicio v del bloque más largo, de modo que $s = s_{\max}$ y $O = S'$ en el Lema 3.1.

Cota superior de v . Por el Teorema 2.2, $\Lambda \geq x$ con $x = e^{-\sigma/20} < e^{-4,2} < 0,015$, y como en [4],

$$\frac{\delta}{2^\sigma} = 1 - e^{-\Lambda} \geq 1 - e^{-x} \geq \frac{x}{1+x} > \frac{e^{-\sigma/20}}{1,015}.$$

Por el Lema 3.1 y $3^n < 2^\sigma$,

$$v = \frac{c}{\delta} < 1,015 \left(1 + 4\left(\frac{3}{2}\right)^{S'}\right) e^{\sigma/20} \leq 1,015 \cdot 5 \left(\frac{3}{2}\right)^{S'} e^{\sigma/20}.$$

Cota inferior de v . Por la Proposición 2.1, $v \geq 2^{s_{\max}+1} - 1$, y como $s_{\max} + 1 \geq 2$, $\ln v \geq (s_{\max} + 1) \ln 2 - \ln \frac{4}{3}$.

Combinación. Como los exponentes distintos de 1 son al menos 2, $\sigma \geq 2n - N_1$, es decir, $s_{\max} = N_1 - S' \geq 2n - \sigma - S'$. Las dos cotas de v dan

$$(2n - \sigma - S' + 1) \ln 2 - \ln \frac{4}{3} < \ln 1,015 + \ln 5 + S' \ln \frac{3}{2} + \frac{\sigma}{20},$$

es decir, $S' \ln 3 > (2n - \sigma) \ln 2 - \sigma/20 - K_1$. Finalmente, $(2n - \sigma) \ln 2 = n \ln \frac{4}{3} - \Lambda$ y $\sigma/20 = nL/20 + \Lambda/(20 \ln 2)$, lo que da el Teorema 1.1. $\square$

Demostración del Corolario 1.2. La primera parte se sigue de $\Lambda \leq n \ln(10/9)$, con $(a - b \ln \frac{10}{9})/\ln 3 = 0,08690\dots$ y $K_1/\ln 3 = 1,10945\dots$ La segunda, de $\Lambda < \frac{5}{3}A \leq \frac{5r}{6}$, con $a/\ln 3 = 0,18972\dots$ y $\frac{5}{6}b/\ln 3 = 0,81324\dots$ $\square$

5. Consecuencias

Corolario 5.1 (uno y dos bloques). *No hay ciclos no triviales con uno o dos bloques de exponentes iguales a 1.*

Demostración. Con $r = 1$ es $S' = 0$, y el Corolario 1.2 exige $0,0869n < 1,11$, es decir, $n \leq 12$, en contradicción con $n \geq 92$. Con $r = 2$, $S' = s_{\min}$ es el bloque más corto y $A \leq 1$, de modo que $\Lambda < 5/3$ y el Teorema 1.1 da $s_{\min} > 0,18972n - 2,736$. Por la Proposición 2.1, $s_{\min} < 0,11434n + 1,842$. Ambas desigualdades exigen $0,07538n < 4,578$, es decir, $n < 61$, en contradicción con $n \geq 92$. $\square$

El Corolario 5.1 recupera los teoremas de [1] y [4], que allí se demuestran por separado.

Corolario 5.2 (tres bloques). *En un ciclo no trivial con exactamente tres bloques de exponentes iguales a 1, de longitudes $s_{\min} \leq s_{\text{med}} \leq s_{\max}$:*

1. $s_{\min} + s_{\text{med}} > 0,18972n - 3,550$;
2. $s_{\text{med}} > 0,0753n - 5,98$.

En particular, si $s_{\min} + s_{\text{med}} \leq M$, entonces $n < (M + 3,550)/0,18972$; y no hay ciclos no triviales con tres bloques cuyos dos bloques menores sumen como mucho 13.

Demostración. Con $r = 3$ es $A \leq 3/2$, luego $\Lambda < 5/2$, y el Teorema 1.1 da la primera desigualdad. Restando la cota de $s_{\min}$ de la Proposición 2.1 con $r = 3$, $s_{\min} < 0,11434n + 2,427$, se obtiene la segunda. Si $s_{\min} + s_{\text{med}} \leq 13$, la primera exige $n < 87$, en contradicción con $n \geq 92$. $\square$

Observación 5.3 (alcance). El método no excluye todos los ciclos con tres bloques: cuando los dos bloques menores suman más de $0,19n$ aproximadamente, las estimaciones anteriores no bastan para excluir todos esos perfiles. Con cotas inferiores de n más fuertes, como la que se deduce de los trabajos de Eliahou, Hercher y otros sobre el número de términos impares de un ciclo no trivial [7], el umbral del último enunciado del Corolario 5.2 crece en proporción.

6. Relación con resultados conocidos

Luca [8] demostró (su Teorema 2.1) que existe una constante absoluta C_1 tal que todo ciclo no trivial tiene al menos $C_1 \log \sigma$ bloques máximos de exponentes iguales a 1, que él llama subidas; en su notación, la longitud del ciclo n corresponde a nuestra σ . Su Corolario 2.2 da que, para cada r fijo, solo hay un número finito de ciclos con r bloques; Mimuro [10] lo había demostrado antes para los perfiles $(1^i, (j+1)^k)$. Rozier [11] demostró que, agrupando los términos de un ciclo de la aplicación $3x+1$ en bloques de igual paridad, solo hay un número finito de ciclos con a lo sumo k bloques, para cada k ; ese recuento incluye las subidas de un solo paso y es, en esencia, el número m de mínimos locales. Brox [3] demostró la finitud de los ciclos con pocos descensos, y Simons y de Weger [12] y Hercher [7] excluyeron los m -ciclos con $m \leq 91$. El Teorema 1.1 se refiere a otra magnitud: la parte de los exponentes iguales a 1 que queda fuera del bloque más largo. La demostración usa las técnicas de [7, 5] recogidas en [2], la cota de Ellison [6] y la cota del acarreo de [4], extendida aquí a cualquier número de bloques.

Referencias

- [1] M. Cerdá Bennassar, *Ciclos de Collatz con un único bloque de exponentes unitarios*, 2026.
- [2] M. Cerdá Bennassar, *Bloques de exponentes unitarios en los ciclos de Collatz: todo ciclo no trivial tiene un bloque corto*, 2026.
- [3] T. Brox, *Collatz cycles with few descents*, Acta Arith. **92** (2000), 181–188.
- [4] M. Cerdá Bennassar, *Ciclos de Collatz con exactamente dos bloques de exponentes unitarios*, 2026.
- [5] S. Eliahou, *The $3x+1$ problem: new lower bounds on nontrivial cycle lengths*, Discrete Math. **118** (1993), 45–56.
- [6] W. J. Ellison, *On a theorem of S. Sivasankaranarayana Pillai*, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux (1970–1971), exp. n.º 10, 1–10. https://www.numdam.org/item/STNB_1970-1971___A10_0/
- [7] C. Hercher, *There are no Collatz m -cycles with $m \leq 91$* , J. Integer Seq. **26** (2023), art. 23.3.5.
- [8] F. Luca, *On the nontrivial cycles in Collatz’s problem*, SUT J. Math. **41** (2005), n.º 1, 31–41.
- [9] M. Cerdá Bennassar, *Memorias binarias, acarreo y cierre de ciclos*, 2026.
- [10] T. Mimuro, *On certain simple cycles of the Collatz conjecture*, SUT J. Math. **37** (2001), n.º 2, 79–89.
- [11] O. Rozier, *Problème de Syracuse: « Majorations » élémentaires des cycles*, Singularité **2** (1991), n.º 5, 8–11.

- [12] J. L. Simons y B. de Weger, *Theoretical and computational bounds for m -cycles of the $3n + 1$ problem*, Acta Arith. **117** (2005), 51–70.