

Ningún bloque de exponentes unitarios es demasiado largo: ciclos de Collatz con tres bloques

Miguel Cerdá Bennassar

Octubre de 2026

Resumen

Para un ciclo no trivial de la aplicación impar $F(u) = (3u + 1)/2^{\nu_2(3u+1)}$, con n términos, suma de exponentes σ y N_1 exponentes iguales a 1, se demuestra que la forma lineal $\Lambda = \sigma \ln 2 - n \ln 3$ cumple $\Lambda \geq e^{-\sigma/1000}$. La demostración combina la cota inferior de Hercher y Puchert para el número de términos impares de un ciclo no trivial, un cálculo certificado con el desarrollo en fracción continua de $\log 2 / \log 3$ y el teorema de Matveev. Con esta cota y la estimación del acarreo del escrito anterior, se obtiene que ningún bloque de exponentes iguales a 1 contiene más de $0,3691 N_1 + 0,00092 \sigma + 1,73$ de ellos. Como consecuencia, ningún ciclo no trivial tiene sus exponentes iguales a 1 formando uno, dos o tres bloques cíclicos máximos. Estas estimaciones no excluyen los ciclos con cuatro o más bloques.

1. Introducción

Este escrito continúa la serie formada por [9, 1, 2, 3, 6], cuya notación seguimos. Para un ciclo no trivial de F con n términos, perfil $(\ell_0, \dots, \ell_{n-1})$ y $\sigma = \sum \ell_j$, escribimos

$$L = \log_2 3, \quad \Lambda = \sigma \ln 2 - n \ln 3 > 0, \quad \delta = 2^\sigma - 3^n = 2^\sigma (1 - e^{-\Lambda}).$$

Los exponentes iguales a 1 forman $r \geq 1$ bloques cíclicos máximos, de longitudes $s_1, \dots, s_r$, con total N_1 .

Teorema 1.1. *En todo ciclo no trivial de F , cada bloque de exponentes iguales a 1 cumple*

$$s_i \ln 3 < N_1 \ln \frac{3}{2} + \frac{\sigma}{1000} + \ln \frac{20}{3}, \quad \text{es decir,} \quad s_i < 0,3691 N_1 + 0,00092 \sigma + 1,73.$$

Teorema 1.2. *Ningún ciclo no trivial de F tiene sus exponentes iguales a 1 formando uno, dos o tres bloques cíclicos máximos.*

Los casos de uno y dos bloques se demostraron en [1, 3, 6]; aquí se obtienen de nuevo a partir del Teorema 1.1. La pieza que lo hace posible es la cota diofántica de la sección 3.

2. Resultados que se utilizan

Proposición 2.1 ([1, 2, 6]). *Para todo ciclo no trivial de F :*

1. el inicio v de un bloque de unos de longitud s cumple $v \geq 2^{s+1} - 1$;
2. $\Lambda < \frac{5}{3}A$, con $A = \sum_i 2^{-s_i}$;
3. si se empieza el ciclo en el inicio de un bloque de unos y O es el número de exponentes iguales a 1 fuera de ese bloque, el acarreo cumple $c < 3^n + 4(3/2)^{O2^\sigma}$;
4. se tiene $\sigma \geq 2n - N_1$.

La primera parte es el Lema 3.1 de [1]; la segunda, el Lema 3.1 de [2]; la tercera, el Lema 3.1 de [6]; la cuarta se sigue de que los exponentes distintos de 1 son al menos 2.

Teorema 2.2 (Hercher y Puchert; véase [4]). *Todo ciclo no trivial de la aplicación de Collatz tiene más de $7,2 \cdot 10^{10}$ términos impares.*

Es la cota que Hercher [4] recoge en su introducción, atribuida a sus trabajos con Puchert; descansa en la verificación computacional de la conjetura de Collatz hasta valores muy grandes. Los términos impares del ciclo de la aplicación de Collatz son exactamente los n términos del ciclo de F , de modo que $n > 7,2 \cdot 10^{10}$.

Teorema 2.3 (Matveev [8]). *Sean α_1, α_2 números racionales positivos y b_1, b_2 enteros con $\alpha_1^{b_1} \alpha_2^{b_2} \neq 1$. Sean $\log A_i \geq \max\{h(\alpha_i), |\log \alpha_i|, 0, 16\}$ y $B \geq \max\{|b_1|, |b_2|\}$. Entonces*

$$\log|\alpha_1^{b_1} \alpha_2^{b_2} - 1| > -1,4 \cdot 30^5 \cdot 2^{4,5} \log A_1 \log A_2 (1 + \log B).$$

Para $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 2$ se puede tomar $\log A_1 = \ln 3$ y $\log A_2 = \ln 2$; la constante es entonces $K = 1,4 \cdot 30^5 \cdot 2^{4,5} \ln 2 \ln 3 = 586\,191\,077,07 \dots$

3. Una cota diofántica certificada

Teorema 3.1. *Para todo ciclo no trivial de F se tiene $\Lambda \geq e^{-\sigma/1000}$.*

Demostración. Por el Teorema 2.2 y $2^\sigma > 3^n$, se tiene $\sigma > nL > 1,141 \cdot 10^{11}$, de modo que $e^{-\sigma/1000} < e^{-10^8}$. Sea $\theta = \log 2 / \log 3$, de modo que $\Lambda = \ln 3 \cdot |\sigma\theta - n| \geq \ln 3 \cdot \|\sigma\theta\|$, donde $\|\cdot\|$ es la distancia al entero más próximo. Distinguimos dos tramos, con $\sigma_0 = 1,85 \cdot 10^{13}$.

Tramo $\sigma \leq \sigma_0$. Las reducidas p_k/q_k del desarrollo en fracción continua de θ incluyen

$$q_K = 18\,340\,740\,190\,704 \leq \sigma_0 < q_{K+1} = 83\,130\,157\,078\,217.$$

Por la propiedad de mejor aproximación de las reducidas, para todo entero $0 < q < q_{K+1}$ se tiene $\|q\theta\| \geq \|q_K\theta\|$, y además $\|q_K\theta\| > 1/(q_K + q_{K+1})$ [5]. Por tanto, para $\sigma \leq \sigma_0$,

$$\Lambda \geq \frac{\ln 3}{q_K + q_{K+1}} > 1,08 \cdot 10^{-14} > e^{-33} > e^{-\sigma/1000}.$$

Tramo $\sigma > \sigma_0$. El número $\Lambda' = 3^n 2^{-\sigma} - 1$ está en $(-1, 0)$ y $|\Lambda'| = 1 - e^{-\Lambda} < \Lambda$. Por el Teorema 2.3, con $b_1 = n$, $b_2 = -\sigma$ y $B = \sigma$, que cumple $B \geq \max\{n, \sigma\}$ porque $\sigma > n$,

$$\Lambda > |\Lambda'| > \exp(-K(1 + \ln \sigma)).$$

La función $\sigma/(1 + \ln \sigma)$ es creciente para $\sigma > 1$, y en σ_0 se tiene $K(1 + \ln \sigma_0) < 1,8494 \cdot 10^{10} < \sigma_0/1000$ (Observación 3.2). Por tanto $K(1 + \ln \sigma) \leq \sigma/1000$ para todo $\sigma \geq \sigma_0$, y $\Lambda > e^{-\sigma/1000}$. $\square$

Observación 3.2 (certificado del cálculo). Los datos numéricos de la demostración se han obtenido con aritmética racional exacta. Para $\ln 2$ y $\ln 3$ se usan los intervalos racionales que da la serie

$$\ln \frac{1+z}{1-z} = 2 \sum_{j \geq 0} \frac{z^{2j+1}}{2j+1}, \quad 0 < \ln \frac{1+z}{1-z} - 2 \sum_{j=0}^{N-1} \frac{z^{2j+1}}{2j+1} < \frac{2z^{2N+1}}{(2N+1)(1-z^2)},$$

con $z = 1/3$ para $\ln 2$, $z = 1/2$ para $\ln 3$ y $N = 128$. De ellos se obtiene un intervalo racional que contiene a θ . Los desarrollos en fracción continua de sus dos extremos coinciden en los 59 primeros cocientes parciales,

$$\theta = [0; 1, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23, 2, 2, 1, 1, 55, 1, 4, 3, 1, 1, 15, 1, 9, 2, 5, 7, 1, 1, 4, 8, \dots],$$

y como el conjunto de los números reales con un desarrollo que empieza de una forma dada es un intervalo, esos cocientes son los de θ . Entre las reducidas que determinan están q_K y q_{K+1} . Con el mismo método se comprueban, con cotas superiores racionales de $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln \sigma_0$ y $\sqrt{2}$, las desigualdades $\ln 3/(q_K + q_{K+1}) > 1,08 \cdot 10^{-14}$ y $K(1 + \ln \sigma_0) < 1,8494 \cdot 10^{10} < \sigma_0/1000$. El código figura en el Apéndice A.

4. Demostración del Teorema 1.1

Fijamos un bloque i y empezamos el ciclo en su inicio v_i . Por la Proposición 2.1, con $O = N_1 - s_i$ y $y = (3/2)^O \geq 1$, y como $3^n < 2^\sigma$,

$$v_i = \frac{c}{\delta} < \frac{(1+4y)2^\sigma}{\delta} \leq \frac{5y}{1-e^{-\Lambda}}.$$

Por el Teorema 3.1, $\Lambda \geq x$ con $x = e^{-\sigma/1000} < 1$, y como $1 - e^{-t}$ es creciente y $1 - e^{-x} \geq x/(1+x) > x/2$, resulta

$$v_i < 10 \left(\frac{3}{2}\right)^{N_1 - s_i} e^{\sigma/1000}.$$

Por otra parte, $v_i \geq 2^{s_i+1} - 1 \geq \frac{3}{2} 2^{s_i}$, pues $s_i \geq 1$. Comparando,

$$s_i \ln 2 + s_i \ln \frac{3}{2} < N_1 \ln \frac{3}{2} + \frac{\sigma}{1000} + \ln \frac{20}{3},$$

que es la primera forma del enunciado, pues $\ln 2 + \ln \frac{3}{2} = \ln 3$. La segunda se sigue de $\ln \frac{3}{2}/\ln 3 = 0,36907\dots$, $1/(1000 \ln 3) = 0,000911\dots$ y $\ln \frac{20}{3}/\ln 3 = 1,7269\dots$ $\square$

5. Demostración del Teorema 1.2

Escribimos $\gamma = \ln \frac{4}{3}/\ln 3 = 1 - 2 \ln \frac{3}{2}/\ln 3 = 0,26185\dots$

Uno o dos bloques. Si $r \leq 2$, el bloque más largo cumple $s_{\max} \geq N_1/2$, y el Teorema 1.1 da

$$N_1 \left(\frac{1}{2} \ln 3 - \ln \frac{3}{2}\right) < \frac{\sigma}{1000} + \ln \frac{20}{3}, \quad \frac{1}{2} \ln 3 - \ln \frac{3}{2} = 0,14384\dots$$

Además $A \leq 1$, luego $\Lambda < 5/3$ por la Proposición 2.1; así $\sigma < nL + C_2$ y, por la cuarta parte, $N_1 > (2-L)n - C_2$, con $C_2 = 5/(3 \ln 2) = 2,4045\dots$ Sustituyendo,

$$\left(0,14384(2-L) - \frac{L}{1000}\right)n < 0,14385 C_2 + \frac{C_2}{1000} + \ln \frac{20}{3},$$

es decir, $0,05811n < 2,2455$, que exige $n < 39$, en contradicción con $n > 7,2 \cdot 10^{10}$.

Tres bloques. Sean $s_{\min} \leq s_{\text{med}} \leq s_{\max}$ las longitudes. Aplicando el Teorema 1.1 a los dos bloques mayores,

$$s_{\min} = N_1 - s_{\text{med}} - s_{\max} > \gamma N_1 - \frac{2}{\ln 3} \left(\frac{\sigma}{1000} + \ln \frac{20}{3} \right).$$

Por otra parte, el Teorema 3.1 y la Proposición 2.1 dan $e^{-\sigma/1000} \leq \Lambda < \frac{5}{3}A \leq 5 \cdot 2^{-s_{\min}}$, es decir,

$$s_{\min} < \log_2 5 + \frac{\sigma}{1000 \ln 2}.$$

Como $A \leq 3/2$, se tiene $\Lambda < 5/2$; así $\sigma < nL + C_3$ y $N_1 > (2 - L)n - C_3$, con $C_3 = 5/(2 \ln 2) = 3,6067 \dots$. Combinando las tres desigualdades,

$$(\gamma(2 - L) - \kappa L)n < \gamma C_3 + \log_2 5 + \frac{2}{\ln 3} \ln \frac{20}{3} + \kappa C_3, \quad \kappa = \frac{1}{1000 \ln 2} + \frac{2}{1000 \ln 3}.$$

Numéricamente, el coeficiente de la izquierda es mayor que 0,1035 y el lado derecho es menor que 6,732, lo que exige $n < 66$, en contradicción con $n > 7,2 \cdot 10^{10}$. $\square$

6. Alcance

Observación 6.1 (cuatro o más bloques). El Teorema 1.1 dice que cada bloque contiene a lo sumo, aproximadamente, el 36,9 % de los exponentes iguales a 1. Con tres bloques, eso obliga al más corto a contener al menos el 26,2 %, lo que contradice la cota del bloque más corto. Con cuatro o más bloques, la suma de las cotas individuales supera el total, y el argumento no produce ninguna contradicción.

Observación 6.2 (constantes de los escritos anteriores). La cota $\Lambda \geq e^{-\sigma/1000}$ puede sustituir a la que se deduce de Ellison en los escritos [2, 6]. Así, por ejemplo, el razonamiento del Teorema 1.1 de [2] da, para todo ciclo no trivial, $\min_i s_i < \log_2(5r/3) + \sigma/(1000 \ln 2)$. Esos escritos usan la cota de Ellison, que no depende del resultado de Hercher y Puchert.

7. Relación con resultados conocidos

Luca [7] demostró (su Teorema 2.1) que existe una constante absoluta C_1 tal que todo ciclo no trivial tiene al menos $C_1 \log \sigma$ bloques máximos de exponentes iguales a 1, que él llama subidas, y dedujo (su Corolario 2.2) que para cada r fijo solo hay un número finito de ciclos con r bloques; Mimuro [10] lo había demostrado antes para los perfiles $(1^i, (j+1)^k)$. Rozier [11] demostró que, agrupando los términos de un ciclo de la aplicación $3x+1$ en bloques de igual paridad, solo hay un número finito de ciclos con a lo sumo k bloques, para cada k ; ese recuento incluye las subidas de un solo paso y es, en esencia, el número m de mínimos locales. Simons y de Weger [12] y Hercher [4] excluyeron los m -ciclos con $m \leq 91$, donde m es el número de mínimos locales. El Teorema 1.2 se refiere a los ciclos con a lo sumo tres bloques, sin restringir m . La demostración utiliza la cota de Hercher y Puchert para el número de términos impares, el teorema de Matveev [8] y las estimaciones de [2, 6].

A. Código

El programa siguiente, en Python 3 y solo con aritmética racional exacta (`fractions`), certifica los datos de la sección 3.

```
from fractions import Fraction as F

def ln_interval(x, N=128):
    """Intervalo racional [lo, hi] que contiene ln(x), x racional > 1,
    mediante  $\ln((1+z)/(1-z)) = 2 \sum z^{(2j+1)}/(2j+1)$ ,
    con  $z = (x-1)/(x+1)$ ."""
    z = (F(x) - 1) / (F(x) + 1)
    s = sum(z**(2*j+1) / (2*j+1) for j in range(N)) * 2
    resto = 2 * z**(2*N+1) / ((2*N+1) * (1 - z**2))
    return s, s + resto

def cf(x, kmax):
    a = []
    for _ in range(kmax):
        q = x.numerator // x.denominator
        a.append(q)
        x = x - q
        if x == 0: break
        x = 1 / x
    return a

def convergents(a):
    p0, q0, p1, q1 = 0, 1, 1, 0
    out = []
    for ai in a:
        p0, q0, p1, q1 = p1, q1, ai*p1 + p0, ai*q1 + q0
        out.append((p1, q1))
    return out

l2 = ln_interval(2)          # z = 1/3
l3 = ln_interval(3)          # z = 1/2
th_lo, th_hi = l2[0] / l3[1], l2[1] / l3[0]
a_lo, a_hi = cf(th_lo, 60), cf(th_hi, 60)
k = 0
while k < min(len(a_lo), len(a_hi)) and a_lo[k] == a_hi[k]:
    k += 1
comunes = a_lo[:k - 1]      # cocientes comunes a todo el intervalo
conv = convergents(comunes)
sigma0 = 185 * 10**11
qK = max(q for p, q in conv if q <= sigma0)
qN = min(q for p, q in conv if q > sigma0)
print("cocientes parciales certificados:", len(comunes))
print(comunes[:31])
print("q_K =", qK, " q_K+1 =", qN)
print("ln3/(q_K+q_K+1) > 1,08e-14:", l3[0] / (qK + qN) > F(108, 10**16))
```

```

# umbral de Matveev:  $K(1 + \ln \sigma_0) < \sigma_0/1000$ 
sqrt2_hi = F(141421356238, 10**11) # cota superior de raíz de 2
assert sqrt2_hi**2 > 2
K_hi = F(14, 10) * 30**5 * 16 * sqrt2_hi * l2[1] * l3[1]
#  $\ln 10 = \ln 2 + \ln(5/4) + 2 \ln 2$ 
l10 = (l2[0] + ln_interval(F(5, 4))[0] + 2*l2[0],
       l2[1] + ln_interval(F(5, 4))[1] + 2*l2[1])
lnsig0_hi = 13 * l10[1] + ln_interval(F(185, 100))[1]
print("K < 586 191 078:", K_hi < 586191078)
print("1 + ln sigma0 < 31,549:", 1 + lnsig0_hi < F(31549, 1000))
print("K(1+ln sigma0) < 1,8494e10 < sigma0/1000:",
      K_hi * (1 + lnsig0_hi) < 18494 * 10**6 < F(sigma0, 1000))

```

Referencias

- [1] M. Cerdá Bennassar, *Ciclos de Collatz con un único bloque de exponentes unitarios*, 2026.
- [2] M. Cerdá Bennassar, *Bloques de exponentes unitarios en los ciclos de Collatz: todo ciclo no trivial tiene un bloque corto*, 2026.
- [3] M. Cerdá Bennassar, *Ciclos de Collatz con exactamente dos bloques de exponentes unitarios*, 2026.
- [4] C. Hercher, *There are no Collatz m -cycles with $m \leq 91$* , J. Integer Seq. **26** (2023), art. 23.3.5.
- [5] A. Ya. Khinchin, *Continued Fractions*, University of Chicago Press, 1964.
- [6] M. Cerdá Bennassar, *El bloque más largo de exponentes unitarios en los ciclos de Collatz*, 2026.
- [7] F. Luca, *On the nontrivial cycles in Collatz's problem*, SUT J. Math. **41** (2005), n.º 1, 31–41.
- [8] E. M. Matveev, *An explicit lower bound for a homogeneous rational linear form in the logarithms of algebraic numbers. II*, Izv. Math. **64** (2000), n.º 6, 1217–1269.
- [9] M. Cerdá Bennassar, *Memorias binarias, acarreos y cierre de ciclos*, 2026.
- [10] T. Mimuro, *On certain simple cycles of the Collatz conjecture*, SUT J. Math. **37** (2001), n.º 2, 79–89.
- [11] O. Rozier, *Problème de Syracuse: « Majorations » élémentaires des cycles*, Singularité **2** (1991), n.º 5, 8–11.
- [12] J. L. Simons y B. de Weger, *Theoretical and computational bounds for m -cycles of the $3n + 1$ problem*, Acta Arith. **117** (2005), 51–70.