

Conjugados afines de la aplicación de Collatz

Miguel Cerdá Bennassar

Septiembre de 2026

Resumen

Introducimos la familia de aplicaciones $T_c(n) = (n+c)/2$ si $n \equiv c \pmod{2}$ y $T_c(n) = 3n + 3 - 2c$ en otro caso, con $c \in \mathbb{Z}$, y demostramos que cada T_c es conjugada de la aplicación de Collatz $\mathcal{C}$ mediante $\varphi_c(m) = 3m + c$. Toda órbita de T_c entra en la clase $c \pmod{3}$ en un número finito de pasos, y allí su dinámica es exactamente la de Collatz. Por tanto, los ciclos de T_c corresponden uno a uno con los de $\mathcal{C}$ en $\mathbb{Z}$, y la convergencia de T_c a su 3-ciclo $(12+c, 6+c, 3+c)$ equivale a la conjetura de Collatz. La familia contiene todos los sistemas con 3-ciclo prescrito de la forma $(C+9, C+3, C)$, y sus raíces digitales quedan explicadas por la conjugación. Los ciclos negativos de Collatz reaparecen como ciclos positivos de T_c a partir de umbrales explícitos de c .

1. Introducción

Se llama aplicación de Collatz a $\mathcal{C}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $\mathcal{C}(m) = m/2$ si m es par y $\mathcal{C}(m) = 3m + 1$ si m es impar. Una forma natural de construir sistemas con un ciclo prescrito es transportar la dinámica de $\mathcal{C}$ mediante una biyección afín. Este escrito muestra que una familia de sistemas con 3-ciclos prescritos de la forma (A, B, C) con $A = C + 9$ es exactamente la familia de esos transportes. Esto explica de una vez sus ciclos, sus raíces digitales y la dificultad de demostrar su convergencia.

Los resultados de la sección 2 están demostrados; los datos de la tabla 3 son computacionales.

2. La familia T_c

Definición 2.1. Para $c \in \mathbb{Z}$ definimos $T_c: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ y $\varphi_c: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ por

$$T_c(n) = \begin{cases} \frac{n+c}{2} & \text{si } n \equiv c \pmod{2}, \\ 3n + 3 - 2c & \text{si } n \not\equiv c \pmod{2}, \end{cases} \quad \varphi_c(m) = 3m + c.$$

La primera rama está bien definida porque $n+c$ es par. Si c es par, T_c divide a los pares, $T_c(n) = n/2 + c/2$, y multiplica a los impares. Si c es impar, los papeles se intercambian.

Teorema 2.2 (Conjugación). *Para todo $c \in \mathbb{Z}$ se cumple $T_c \circ \varphi_c = \varphi_c \circ \mathcal{C}$.*

Demostración. Como $\varphi_c(m) = 3m + c \equiv m + c \pmod{2}$, se tiene $\varphi_c(m) \equiv c \pmod{2}$ si y solo si m es par.

$$\text{Si } m \text{ es par: } T_c(\varphi_c(m)) = \frac{3m + c + c}{2} = 3 \cdot \frac{m}{2} + c = \varphi_c(\mathcal{C}(m)).$$

$$\text{Si } m \text{ es impar: } T_c(\varphi_c(m)) = 3(3m + c) + 3 - 2c = 3(3m + 1) + c = \varphi_c(\mathcal{C}(m)). \quad \square$$

La imagen $\varphi_c(\mathbb{Z})$ es la clase $\{n \in \mathbb{Z} : n \equiv c \pmod{3}\}$, y la aplicación $\varphi_c: \mathbb{Z} \rightarrow \varphi_c(\mathbb{Z})$ es una biyección. Por el teorema, esa clase es invariante por T_c y, restringida a ella, T_c es una copia exacta de $\mathcal{C}$.

Proposición 2.3. *Toda órbita de T_c en $\mathbb{Z}$ entra en la clase $c \pmod{3}$ en un número finito de pasos y no vuelve a salir.*

Demostración. Si $n \not\equiv c \pmod{2}$, entonces $T_c(n) = 3n + 3 - 2c \equiv -2c \equiv c \pmod{3}$. Si $n \equiv c \pmod{2}$, entonces $T_c(n) - c = (n - c)/2$. Por tanto, mientras la órbita use solo la primera rama, la distancia $|n - c|$ se divide por 2 en cada paso; como es un entero, tras un número finito de pasos o se usa la segunda rama o se llega a $n = c$, y ambos casos caen en la clase $c \pmod{3}$. La invariancia se sigue del teorema 2.2. $\square$

Corolario 2.4. *La aplicación φ_c establece una biyección entre los ciclos de $\mathcal{C}$ en $\mathbb{Z}$ y los ciclos de T_c en $\mathbb{Z}$, que conserva las longitudes. Además, una órbita de T_c es eventualmente periódica si y solo si lo es la órbita de Collatz del punto en que entra en la clase $c \pmod{3}$.*

Demostración. Todo ciclo de T_c está contenido en su propio futuro, luego, por la proposición 2.3, en la clase $c \pmod{3}$, donde T_c es conjugada de $\mathcal{C}$. El resto es inmediato por la conjugación. $\square$

Corolario 2.5 (Equivalencia con la conjetura de Collatz). *1. Para cada $c \in \mathbb{Z}$, la conjetura de Collatz equivale a que, para todo $m \geq 1$, la órbita de $3m + c$ bajo T_c alcance el ciclo $(12 + c, 6 + c, 3 + c) = \varphi_c(4, 2, 1)$.*

2. En particular, para $c = 0$, es decir, $T_0(n) = n/2$ si n es par y $3n + 3$ si n es impar, la conjetura de Collatz equivale a que toda órbita de un entero positivo alcance el ciclo $(12, 6, 3)$.

Demostración. El apartado 1 es la conjugación. Para el 2: si $n \geq 1$, entonces $T_0(n) \geq 1$, así que la órbita permanece en los positivos; por la proposición 2.3 entra en los múltiplos positivos de 3, que son $\varphi_0(m)$ con $m \geq 1$. $\square$

En consecuencia, ningún argumento que demuestre la convergencia de T_0 puede ser más sencillo que una demostración de la conjetura de Collatz.

2.1. Sistemas con ciclo prescrito

El 3-ciclo de T_c es $(A, B, C) = (c + 12, c + 6, c + 3)$, de modo que $A = C + 9$ y $c = C - 3$. Así, para cada entero C existe un único miembro de la familia cuyo ciclo principal es $(C + 9, C + 3, C)$. La tabla 1 recoge algunos.

Proposición 2.6 (Raíces digitales). *Para todo $m \in \mathbb{Z}$, $\varphi_c(m) \equiv 3(m \pmod{3}) + c \pmod{9}$. En particular, el ciclo principal de T_c tiene residuos $(c + 3, c + 6, c + 3) \pmod{9}$, y el patrón de raíces digitales de la familia es periódico en c con periodo 9.*

c	Regla con $n \equiv c \pmod{2}$	Regla con $n \not\equiv c \pmod{2}$	Ciclo principal
-8	$n/2 - 4$	$3n + 19$	$(4, -2, -5)$
-2	$n/2 - 1$	$3n + 7$	$(10, 4, 1)$
-1	$(n - 1)/2$	$3n + 5$	$(11, 5, 2)$
0	$n/2$	$3n + 3$	$(12, 6, 3)$
1	$(n + 1)/2$	$3n + 1$	$(13, 7, 4)$
2	$n/2 + 1$	$3n - 1$	$(14, 8, 5)$

Cuadro 1: Algunos miembros de la familia. Para c impar, la regla de la mitad actúa sobre los impares.

Demostración. Si $m = 3q + s$, entonces $3m + c = 9q + 3s + c$. Para el ciclo, $(4, 2, 1) \pmod{3} = (1, 2, 1)$. $\square$

Así, las raíces digitales de las órbitas de T_c dentro de la clase $c \pmod{3}$ no contienen más información que los residuos módulo 3 de las órbitas de Collatz correspondientes.

2.2. Ciclos heredados

En $\mathbb{Z}$ se conocen cinco ciclos de $\mathcal{C}$ [1]:

- el punto fijo 0;
- el ciclo $(1, 2, 4)$;
- el 2-ciclo $(-1, -2)$;
- el 5-ciclo $-5 \rightarrow -14 \rightarrow -7 \rightarrow -20 \rightarrow -10 \rightarrow -5$;
- el 18-ciclo cuyo menor elemento es -272 , listado en el apéndice.

No se conocen otros. Por el corolario 2.4, cada uno da un ciclo de T_c de la misma longitud, y la imagen φ_c es creciente, así que el signo de sus elementos se decide por el mínimo y el máximo del ciclo original.

Proposición 2.7. *El ciclo $\varphi_c(W)$ de T_c correspondiente a un ciclo W de $\mathcal{C}$ está formado por enteros positivos si y solo si $3 \min W + c \geq 1$, y contiene algún entero positivo si y solo si $3 \max W + c \geq 1$. Los umbrales resultantes son los de la tabla 2.*

Ciclo de Collatz	Contiene positivos si	Totalmente positivo si
$(1, 2, 4)$	$c \geq -11$	$c \geq -2$
(0)	$c \geq 1$	$c \geq 1$
$(-1, -2)$	$c \geq 4$	$c \geq 7$
5-ciclo (mín -20 , máx -5)	$c \geq 16$	$c \geq 61$
18-ciclo (mín -272 , máx -17)	$c \geq 52$	$c \geq 817$

Cuadro 2: Umbrales de positividad de los ciclos heredados.

Observación 2.8. En particular, para todo $c \geq 1$ el entero $c = \varphi_c(0)$ es un punto fijo positivo de T_c . Por ejemplo, $T_2(2) = 2/2 + 1 = 2$. Por tanto, ningún miembro con $c \geq 1$ tiene convergencia universal a su ciclo principal sobre los enteros positivos.

La tabla 3 muestra hacia qué ciclo, identificado por su ciclo de Collatz de origen, va la órbita de cada entero $n \in [1, 10^4]$. Todas las órbitas examinadas terminan en uno de los cinco ciclos heredados.

c	$\varphi_c(1, 2, 4)$	$\varphi_c(0)$	$\varphi_c(-1, -2)$	$\varphi_c(5\text{-ciclo})$	$\varphi_c(18\text{-ciclo})$
-8	10 000				
-2	10 000				
0	10 000				
1	9 999	1			
2	9 998	2			
4	9 996	3	1		
8	9 992	4	4		
20	9 980	6	11	3	
62	9 938	7	31	20	4
100	9 900	8	45	31	16

Cuadro 3: Destino de las órbitas de T_c que empiezan en $[1, 10^4]$.

3. Conclusiones

La familia T_c reúne en una sola fórmula todos los sistemas con 3-ciclo prescrito $(C+9, C+3, C)$, incluidos los de C par, en los que la regla de la mitad actúa sobre los impares. El teorema de conjugación explica a la vez tres cosas: sus ciclos, que son los de Collatz transportados por φ_c ; sus raíces digitales, que son los residuos módulo 3 de las órbitas de Collatz, multiplicados por 3 y desplazados por c ; y la imposibilidad de demostrar su convergencia sin demostrar la conjetura de Collatz.

Construir sistemas con ciclos prescritos no produce, por tanto, dinámicas nuevas: produce copias de la de Collatz. La dificultad no está en el ciclo que se elige, sino en la dinámica que lo rodea.

Observación 3.1. La dinámica de la propia aplicación de Collatz módulo 9, con el grafo de raíces digitales, sus once ciclos, los dos mecanismos expansivos y la estructura de las rachas de pasos impares, se estudia en *Estructura modular de la dinámica de Collatz*, séptimo escrito de la sección 4.1 de este archivo, y en sus complementos.

A. El 18-ciclo de Collatz en los negativos

$-272 \rightarrow -136 \rightarrow -68 \rightarrow -34 \rightarrow -17 \rightarrow -50 \rightarrow -25 \rightarrow -74 \rightarrow -37 \rightarrow -110 \rightarrow -55 \rightarrow -164 \rightarrow -82 \rightarrow -41 \rightarrow -122 \rightarrow -61 \rightarrow -182 \rightarrow -91 \rightarrow -272$

Referencias

- [1] J. C. Lagarias, The $3x+1$ problem and its generalizations, *Amer. Math. Monthly* **92** (1985), 3–23.