

Dos iteraciones sobre enteros positivos y negativos

Miguel Cerdá Bennassar

15 de octubre de 2026

Resumen

Se presentan dos funciones de iteración, F y G , definidas sobre un mismo conjunto de enteros positivos y negativos. Ambas comparten sus reglas sobre los positivos y difieren únicamente en la transformación afín que aplican a los negativos. Se describen su dominio, la estructura en bloques de sus órbitas y el comportamiento de sus términos impares, cuyos signos alternan estrictamente. Mientras que, en los rangos explorados, todas las órbitas de F terminan en un único ciclo, las de G se reparten entre tres. Finalmente, se establece una interpretación común de ambas funciones mediante una misma codificación de otras dos iteraciones.

1. Introducción

Las funciones de iteración definidas a trozos, con reglas distintas según la paridad del argumento, producen a menudo dinámicas cuya sencillez de enunciado contrasta con la dificultad de su estudio. En este escrito presentamos dos de ellas, F y G , que actúan sobre un mismo conjunto D formado por todos los enteros positivos y por los negativos congruentes con 1 módulo 4.

Ambas funciones comparten sus reglas sobre los positivos: dividen entre dos los pares y envían cada impar p al negativo $-2p - 1$. Solo difieren en la rama negativa, que es $(-3d - 1)/4$ para F y $(-3d - 5)/4$ para G . A pesar de esta diferencia mínima, sus dinámicas se separan con claridad: en los rangos explorados, todas las órbitas de F terminan en un único ciclo, mientras que las de G se reparten entre tres.

El escrito se organiza como sigue. En la Sección 2 definimos F y G , comprobamos que conservan D y las reunimos en una familia con un parámetro. En la Sección 3 mostramos ejemplos, describimos la estructura en bloques común a sus órbitas y presentamos sus ciclos. En la Sección 4 seguimos las órbitas de un término impar al siguiente: los signos alternan estrictamente y el paso de un impar positivo al siguiente admite una fórmula cerrada. Solo en la Sección 5 relacionamos ambas funciones con dos iteraciones conocidas mediante una misma codificación, que en el caso de F tiene una lectura especialmente natural en términos de diferencias consecutivas. La Sección 6 recoge las conclusiones.

2. Dos funciones de iteración

Sea

$$D = \mathbb{Z}_{>0} \cup \{d \in \mathbb{Z} : d < 0, d \equiv 1 \pmod{4}\}.$$

El conjunto D contiene todos los enteros positivos y los negativos $-3, -7, -11, -15, \dots$

Definición 2.1. Definimos $F, G: D \rightarrow D$ por

$$F(d) = \begin{cases} \frac{d}{2}, & d > 0, d \text{ par}, \\ -2d - 1, & d > 0, d \text{ impar}, \\ \frac{-3d - 1}{4}, & d < 0, \end{cases} \quad G(d) = \begin{cases} \frac{d}{2}, & d > 0, d \text{ par}, \\ -2d - 1, & d > 0, d \text{ impar}, \\ \frac{-3d - 5}{4}, & d < 0. \end{cases}$$

Las dos funciones coinciden sobre los positivos y solo difieren en la rama negativa. Ambas se reúnen en la familia

$$F_c(d) = \begin{cases} d/2, & d > 0, d \text{ par}, \\ -2d - 1, & d > 0, d \text{ impar}, \\ \frac{-3d - 3 + 2c}{4}, & d < 0, \end{cases} \quad \text{con} \quad F = F_1, \quad G = F_{-1}.$$

Para c impar, la rama negativa da siempre un entero, pues $-3d - 3 + 2c \equiv 2c - 2 \equiv 0 \pmod{4}$ cuando $d \equiv 1 \pmod{4}$. Sin embargo, solo conserva D si $c \geq -1$: en el estado $d = -3$ vale $(6 + 2c)/4$, que es nulo o negativo para $c \leq -3$. Por eso consideramos la familia únicamente para c impar con $c \geq -1$, y en este escrito solo estudiamos $c = 1$ y $c = -1$.

Proposición 2.2. F y G están bien definidas y $F(D) \subseteq D$, $G(D) \subseteq D$.

Demostración. Las dos primeras ramas son comunes. Si $d > 0$ es par, $d/2$ es un entero positivo. Si $d > 0$ es impar, $-2d - 1 < 0$ y, como $2d \equiv 2 \pmod{4}$, se tiene $-2d - 1 \equiv 1 \pmod{4}$.

Sea ahora $d < 0$ con $d \equiv 1 \pmod{4}$, de modo que $d \leq -3$. Entonces $-3d \equiv -3 \equiv 1 \pmod{4}$, luego $-3d - 1 \equiv 0$ y $-3d - 5 \equiv -4 \equiv 0 \pmod{4}$: ambas ramas negativas dan enteros. Además $-3d - 1 \geq 8$ y $-3d - 5 \geq 4$, por lo que $F(d) \geq 2$ y $G(d) \geq 1$ son positivos. $\square$

Definición 2.3. La órbita de $d \in D$ por F es la sucesión $d_0 = d$, $d_{i+1} = F(d_i)$; análogamente para G .

3. Primeros ejemplos y estructura de las órbitas

3.1. Ejemplos

Ejemplo 3.1. Las órbitas de 3 son

$$\begin{aligned} F: \quad & 3 \rightarrow -7 \rightarrow 5 \rightarrow -11 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow -3 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \\ G: \quad & 3 \rightarrow -7 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow -3 \rightarrow 1 \rightarrow -3 \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Coinciden hasta el primer negativo y se separan en él: $F(-7) = 5$, mientras que $G(-7) = 4$.

Ejemplo 3.2. La órbita de 5 por G es periódica:

$$5 \rightarrow -11 \rightarrow 7 \rightarrow -15 \rightarrow 10 \rightarrow 5.$$

Por F , en cambio, $5 \rightarrow -11 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow -3 \rightarrow 2 \rightarrow \dots$

Ejemplo 3.3. La órbita de 17 por G es periódica de longitud 18:

$$\begin{aligned} & 17 \rightarrow -35 \rightarrow 25 \rightarrow -51 \rightarrow 37 \rightarrow -75 \rightarrow 55 \rightarrow -111 \rightarrow 82 \rightarrow 41 \\ & \rightarrow -83 \rightarrow 61 \rightarrow -123 \rightarrow 91 \rightarrow -183 \rightarrow 136 \rightarrow 68 \rightarrow 34 \rightarrow 17. \end{aligned}$$

3.2. Estructura común

Proposición 3.4. Sea $H \in \{F, G\}$ y sea $r = 1$ si $H = F$, $r = 5$ si $H = G$. En toda órbita de H :

1. todo término negativo va seguido de un término positivo;
2. todo término positivo impar va seguido de un término negativo;
3. todo término positivo par va seguido de su mitad;
4. tras un término negativo d aparece un bloque finito de positivos

$$\frac{-3d-r}{4}, \frac{-3d-r}{8}, \dots, \frac{-3d-r}{2^v}, \quad v = v_2(-3d-r) \geq 2,$$

El bloque tiene $v-1$ términos; todos son pares salvo el último, que es el único impar del bloque, y a continuación aparece un nuevo término negativo.

Demostración. Los tres primeros puntos se leen en la definición y en la Proposición 2.2. Para el cuarto, $H(d) = (-3d-r)/4 > 0$; los positivos pares se dividen entre dos hasta alcanzar la parte impar $(-3d-r)/2^v$, que por el punto 2 va seguida de un negativo. $\square$

Así, en ninguna de las dos funciones hay dos negativos consecutivos.

3.3. Ciclos

Proposición 3.5. Las siguientes son ciclos:

- para F : $(2, 1, -3)$;
- para G : $(1, -3)$, $(5, -11, 7, -15, 10)$ y el ciclo de longitud 18 que contiene a 17 (Ejemplo 3.3).

Demostración. Comprobación directa: $F(2) = 1$, $F(1) = -3$, $F(-3) = 2$; $G(1) = -3$, $G(-3) = 1$; las restantes igualdades están en los ejemplos anteriores. $\square$

Observación 3.6. Una exploración computacional con todos los valores iniciales $d \in D$ con $1 \leq d \leq 10^5$ o $-2 \cdot 10^5 < d \leq -3$ no ha encontrado otros ciclos: todas las órbitas de F terminan en $(2, 1, -3)$ y todas las de G en uno de sus tres ciclos. Una sola modificación en la rama negativa, de -1 a -5 , permite pasar de un ciclo conocido a tres ciclos conocidos. No hemos demostrado que no existan otros ciclos ni órbitas no acotadas.

4. Los términos impares de las órbitas

Las órbitas de F y de G contienen términos pares positivos, que solo se dividen entre dos, y términos impares, positivos o negativos, en los que se concentra la dinámica. En esta sección seguimos la órbita de un impar al siguiente.

Proposición 4.1 (Alternancia de signos). En toda órbita de F o de G , los términos impares alternan estrictamente de signo: tras un impar positivo, el siguiente impar es negativo, y tras un negativo, el siguiente impar es positivo.

Demostración. Si $p > 0$ es impar, su imagen $-2p-1$ es ya un impar negativo. Si $d < 0$, por la Proposición 3.4 le sigue un bloque de positivos cuyo único impar es el último. $\square$

Ejemplo 4.2. Conservando solo los impares de las órbitas de los ejemplos anteriores:

$$\begin{aligned} F, 3: & \quad 3, -7, 5, -11, 1, -3, 1, \dots \\ G, 3: & \quad 3, -7, 1, -3, 1, \dots \\ G, 5: & \quad 5, -11, 7, -15, 5, \dots \\ G, 17: & \quad 17, -35, 25, -51, 37, -75, 55, -111, \\ & \quad 41, -83, 61, -123, 91, -183, 17, \dots \end{aligned}$$

Los ciclos de G tienen 2, 5 y 18 términos, de los que 2, 4 y 14 son impares: al conservar solo los impares desaparecen los pares 10 y 82, 136, 68, 34. En cada ciclo hay tantos impares positivos como negativos.

Cada impar negativo queda determinado por el positivo que lo precede, pues es $-2p - 1$. La información esencial está, por tanto, en el paso de un impar positivo al siguiente.

Proposición 4.3. Sea $p > 0$ impar. En su órbita por F , el siguiente impar positivo es

$$\frac{3p+1}{2v_2(3p+1)},$$

y en su órbita por G es

$$\frac{3p-1}{2v_2(3p-1)}.$$

En ambos casos se alcanza tras $1 + v_2(3p \pm 1)$ pasos.

Demostración. El primer paso da $-2p-1$. Para F , $-3(-2p-1)-1 = 6p+2 = 2(3p+1)$; para G , $-3(-2p-1)-5 = 6p-2 = 2(3p-1)$. Por la Proposición 3.4, el siguiente impar es la parte impar de $2(3p \pm 1)$, es decir, la de $3p \pm 1$, y el bloque intermedio tiene $v_2(2(3p \pm 1)) - 1 = v_2(3p \pm 1)$ términos. $\square$

Ejemplo 4.4. Para F y $p = 5$: $5 \rightarrow -11 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, y en efecto $(3 \cdot 5 + 1)/2^4 = 1$ tras $1 + 4 = 5$ pasos. Para G y $p = 5$: $5 \rightarrow -11 \rightarrow 7$, y $(3 \cdot 5 - 1)/2 = 7$ tras $1 + 1 = 2$ pasos.

Observación 4.5. Las dos funciones, vistas de impar positivo en impar positivo, solo difieren en el signo de una unidad. Los impares positivos de los ciclos de G son $\{1\}$, $\{5, 7\}$ y $\{17, 25, 37, 55, 41, 61, 91\}$.

5. Interpretación común

Solo ahora introducimos dos iteraciones externas sobre los enteros positivos:

$$C_+(n) = \begin{cases} n/2, & n \text{ par}, \\ 3n+1, & n \text{ impar}, \end{cases} \quad C_-(n) = \begin{cases} n/2, & n \text{ par}, \\ 3n-1, & n \text{ impar}. \end{cases}$$

La primera es la función de Collatz, cuya conjetura afirma que toda órbita positiva alcanza el valor 1 [2]. La segunda es la variante $3n - 1$, equivalente a la función de Collatz sobre los enteros negativos mediante $n \mapsto -n$: si $n > 0$, entonces $C_-(n) = -C(-n)$, donde C denota la extensión de C_+ a todos los enteros. Sea

$$\phi: \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow D, \quad \phi(n) = \begin{cases} n/2, & n \text{ par}, \\ -2n-1, & n \text{ impar}. \end{cases}$$

Lema 5.1. ϕ es una biyección de $\mathbb{Z}_{>0}$ sobre D , con inversa

$$\phi^{-1}(d) = \begin{cases} 2d, & d > 0, \\ \frac{-d-1}{2}, & d < 0. \end{cases}$$

Demostración. Los pares n se aplican biyectivamente sobre $\mathbb{Z}_{>0}$ mediante $n \mapsto n/2$. Los impares $n = 2k + 1$, $k \geq 0$, se aplican sobre $-4k - 3$, que recorre exactamente los negativos congruentes con 1 módulo 4. $\square$

Proposición 5.2 (Conjugación). Para todo $n \in \mathbb{Z}_{>0}$,

$$F(\phi(n)) = \phi(C_+(n)), \quad G(\phi(n)) = \phi(C_-(n)).$$

Más en general, para todo c impar con $c \geq -1$ y todo n impar positivo, se cumple $F_c(\phi(n)) = \phi(3n + c)$. La condición $c \geq -1$ es exactamente la que garantiza $3n + c > 0$ para todo n impar positivo, pues el caso más desfavorable es $n = 1$.

Demostración. Si n es impar, $\phi(n) = -2n - 1$ y

$$F_c(\phi(n)) = \frac{6n + 3 - 3 + 2c}{4} = \frac{3n + c}{2} = \phi(3n + c),$$

porque $3n + c$ es par. Con $c = 1$ y $c = -1$ se obtienen F y G . Si n es par, sea $m = n/2 = \phi(n) > 0$; entonces $C_{\pm}(n) = m$, y $F(m) = G(m) = \phi(m)$ tanto si m es par ($m/2$) como si es impar ($-2m - 1$). $\square$

Corolario 5.3. Las órbitas de F y de G son las imágenes por ϕ de las órbitas de C_+ y de C_- , respectivamente. Como ϕ es biyectiva, toda órbita de F o de G procede de una única órbita, la de $\phi^{-1}(d_0)$. En particular, los ciclos de la Proposición 3.5 corresponden al ciclo $(1, 4, 2)$ de C_+ y a los ciclos $(1, 2)$, $(5, 14, 7, 20, 10)$ y el ciclo de 17 de C_- . Cambiados de signo, estos tres últimos son los ciclos de la función de Collatz sobre los enteros negativos que contienen a -1 , -5 y -17 , conocidos desde Böhm y Sontacchi [1]; véase también [2].

5.1. La lectura mediante diferencias

Para C_+ , la codificación ϕ tiene un significado inmediato: $\phi(n) = n - C_+(n)$. Por tanto:

Corolario 5.4. Las órbitas de F son exactamente las sucesiones de diferencias consecutivas $d_i = x_i - x_{i+1}$ de las órbitas de Collatz. En particular, los términos impares de una órbita de F son las diferencias impares de la órbita de Collatz correspondiente.

Ejemplo 5.5. La órbita de 3 por F procede de $x_0 = \phi^{-1}(3) = 6$:

x_i	6	3	10	5	16	8	4	2	1	4
d_i	3	-7	5	-11	8	4	2	1	-3	...

Para C_- , la misma codificación ya no es exactamente la diferencia: si n es impar, $n - C_-(n) = -2n + 1 = \phi(n) + 2$. Las órbitas de G son, pues, las sucesiones de diferencias de las órbitas de $3n - 1$ con los términos negativos desplazados en -2 .

Ejemplo 5.6. La órbita de 5 por G procede de $x_0 = \phi^{-1}(5) = 10$:

x_i	10	5	14	7	20	10
$x_i - x_{i+1}$	5	-9	7	-13	10	
d_i	5	-11	7	-15	10	

Observación 5.7. F y G no son dos construcciones distintas, sino la misma lectura, ϕ , aplicada a $3n + 1$ y a $3n - 1$. La lectura que da F , la de las diferencias consecutivas, es la que hace natural esa codificación. En este lenguaje, la Proposición 4.3 recupera las funciones aceleradas sobre los impares, $p \mapsto (3p \pm 1)/2^{v_2(3p \pm 1)}$: el paso de un impar positivo al siguiente en las órbitas de F y de G es el paso de un impar al siguiente en las órbitas de $3n + 1$ y de $3n - 1$.

6. Conclusiones

Hemos presentado dos funciones de iteración, F y G , sobre el conjunto D de los enteros positivos y los negativos congruentes con 1 módulo 4. Coinciden en los positivos y difieren únicamente en una constante de la rama negativa. Sus órbitas comparten la misma estructura: nunca contienen dos negativos consecutivos, se organizan en bloques de positivos que se dividen entre dos, y sus términos impares alternan estrictamente de signo. El paso de un impar positivo p al siguiente viene dado por la parte impar de $3p + 1$ en el caso de F y de $3p - 1$ en el de G .

Esa sola constante basta para separar las dinámicas. En los rangos explorados, F tiene un único ciclo, $(2, 1, -3)$, mientras que G tiene tres, de 2, 5 y 18 términos.

La interpretación de la Sección 5 explica ambos hechos. Mediante una misma biyección ϕ , F y G son conjugadas con las iteraciones $3n + 1$ y $3n - 1$ sobre los enteros positivos. Para F , la codificación es literalmente la sucesión de diferencias consecutivas de una órbita de Collatz; para G , es la sucesión de diferencias de una órbita de $3n - 1$ con los términos negativos desplazados en -2 . En consecuencia, los enunciados sobre ambas familias de órbitas se traducen exactamente:

- la conjetura de Collatz equivale a que toda órbita de F alcance el ciclo $(2, 1, -3)$, pues $\phi(1) = -3$;
- la conjetura de que toda órbita de Collatz sobre los enteros negativos termina en uno de los tres ciclos conocidos [1, 2] equivale a que toda órbita de G termine en uno de sus tres ciclos.

La conjugación no resuelve, por tanto, ninguno de estos problemas, pero proporciona una representación alternativa en la que conviven enteros positivos y negativos y los términos impares presentan una alternancia estricta de signos. Esta construcción se extiende de manera natural a la familia F_c , con c impar positivo, conjugada mediante la misma biyección con las iteraciones $3n + c$. Para valores negativos de c , la extensión requiere considerar cuidadosamente el dominio, pues la transformación $3n + c$ puede abandonar los enteros positivos. El estudio de estas variantes queda abierto como posible continuación.

Referencias

- [1] C. Böhm y G. Sontacchi, *On the existence of cycles of given length in integer sequences like $x_{n+1} = x_n/2$ if x_n even, and $x_{n+1} = 3x_n + 1$ otherwise*, Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Rendiconti **64** (1978), 260–264.
- [2] J. C. Lagarias, *The $3x+1$ problem and its generalizations*, American Mathematical Monthly **92** (1985), 3–23. Disponible en <http://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/lagarias/>.