

Un sistema dinámico sobre enteros y mitades de impares

Miguel Cerdá Bennassar

Octubre de 2026

Resumen

Se estudia un sistema dinámico definido sobre los enteros no negativos y las mitades de números impares, con tres reglas de iteración: para pares, $n \mapsto 3n+1$; para impares, $n \mapsto (n-1)/4$; y para mitades de impares, $n \mapsto 6n+2$. Se muestra que el sistema está bien definido y cerrado en ese conjunto, y que la dinámica en los impares se reduce a una función determinista que depende únicamente de la clase de congruencia módulo 8. Se introduce una identidad afín que determina la longitud exacta de las rachas crecientes y se calcula el factor total hasta la primera rama contractiva, mostrando que no existe un lema de descenso global trivial. La dinámica se reduce después a un mapa de retorno sobre la frontera $\nu_2(n+1) = 1$, cuyo crecimiento queda localizado exactamente en dos clases de congruencia de densidad conjunta $9/32$. Extendido el mapa de retorno a los enteros 2-ádicos, sus ramas resultan completas y su dinámica simbólica es un desplazamiento de Bernoulli sobre un alfabeto numerable, de entropía $3 \log 2$, cuya proyección a las etiquetas de ramas expansivas y contractivas es Bernoulli de parámetro $9/32$. La convergencia al ciclo 0-1 queda formulada como conjetura. Una sección final recoge una coincidencia con la aplicación acelerada de Collatz.

Índice

1. Introducción	2
2. Definición del sistema	2
3. Pares y semienteros como puentes	4
4. Reducción a los impares	4
5. La identidad afín y las rachas crecientes	6
6. Factor total hasta la primera rama contractiva	8
6.1. Caso 1: $F^j(n) \equiv 1 \pmod{8}$	8
6.2. Caso 2: $F^j(n) \equiv 5 \pmod{8}$	9
6.3. Clasificación del episodio expansivo	10
7. Coordenadas 2-ádicas y mapa de retorno	10
7.1. Transición desde la frontera	12
7.2. Mapa de retorno a la frontera	13
7.3. Equivalencia de la convergencia	14
7.4. El mapa de retorno no es contractivo	15
7.5. Factores de crecimiento del mapa de retorno	15
7.6. Clasificación exacta de las ramas de R	16
7.7. Estructura de ramas completas y dinámica simbólica	17
8. Convergencia: conjetura	21

9. Una coincidencia con la aplicación acelerada de Collatz	21
10. Conclusiones	22
A. Tabla de transiciones impar a impar	23
B. Ejemplos de órbitas en impares	23
C. Cálculo detallado del factor total	24

1. Introducción

En una nota manuscrita del autor, de 2019, se describe un algoritmo que, partiendo de un número entero o de la mitad de un número impar, aplica sucesivamente las siguientes operaciones:

- (I) Si el número es par, se multiplica por 3 y se le suma 1.
- (II) Si el número es impar, se le resta 1 y se divide el resultado entre 4.
- (III) Si el número es la mitad de un impar, se multiplica por 6 y se le suma 2.

El proceso se repite con el número obtenido. La nota afirma que la secuencia acaba siempre en 5, 1, 0, y que si se continúa con el 0 como número par se entra en un ciclo infinito entre 0 y 1.

El ejemplo que se da es:

$$2573 \rightarrow 643 \rightarrow 160,5 \rightarrow 965 \rightarrow 241 \rightarrow 60 \rightarrow 181 \rightarrow 45 \rightarrow \\ 11 \rightarrow 2,5 \rightarrow 17 \rightarrow 4 \rightarrow 13 \rightarrow 3 \rightarrow 0,5 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 0.$$

El objetivo de este documento es formalizar el sistema, analizar su dinámica, precisar su relación con la función de Collatz y presentar las observaciones estructurales que localizan el obstáculo que impide demostrar su convergencia.

Alcance. El objeto de estas notas es el sistema en sí: su buena definición, la estructura de su dinámica sobre los impares y la conjetura de convergencia al ciclo 0–1. La Sección 9 recoge, al final y con independencia del resto, una coincidencia con la aplicación acelerada de Collatz que se advierte al comparar las dos funciones sobre los impares.

2. Definición del sistema

Definición 1 (Conjunto de trabajo). *Sea*

$$D = \left\{ \frac{m}{2^k} : m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}$$

el conjunto de los racionales diádicos no negativos. Nos restringiremos al subconjunto de D formado por los enteros no negativos y las mitades de números impares, es decir,

$$S = \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \left\{ \frac{2m+1}{2} : m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}.$$

Definición 2 (Función de transición). *Definimos $T : S \rightarrow S$ por casos:*

$$T(n) = \begin{cases} 3n+1, & \text{si } n \text{ es entero par,} \\ \frac{n-1}{4}, & \text{si } n \text{ es entero impar,} \\ 6n+2, & \text{si } n \text{ es la mitad de un impar.} \end{cases}$$

Observación 1. La definición de “mitad de un impar” se refiere a números de la forma $(2m + 1)/2 = m + 1/2$ con $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. En particular, números como 0,5, 1,5, 2,5, 160,5 pertenecen a esta categoría. No pertenecen a ella números como 0,25 o 0,75.

Proposición 1 (Clausura). El conjunto S es invariante bajo T . Es decir, si $n \in S$, entonces $T(n) \in S$. Además, T nunca produce un número con denominador mayor que 2.

Demostración. Distinguimos tres casos.

1. Si n es entero par, $T(n) = 3n + 1$. Como n es par, $3n$ es par, y $3n + 1$ es impar. Por tanto $T(n)$ es un entero impar, que pertenece a S .
2. Si n es entero impar, $T(n) = (n - 1)/4$. Si $n = 1$, entonces $T(1) = 0 \in S$. Supongamos ahora que $n > 1$ es impar. Como $n - 1$ es un entero positivo par, podemos escribir $n - 1 = 2^k q$, con q impar y $k \geq 1$.
 - Si $k \geq 2$, entonces $(n - 1)/4$ es entero. Si además $k \geq 3$, el resultado es par; si $k = 2$, el resultado es impar. En ambos casos pertenece a S .
 - Si $k = 1$, entonces $n - 1 = 2q$ con q impar, y $(n - 1)/4 = q/2$, que es la mitad de un impar. Pertenecer a S .

No puede ocurrir $k = 0$ porque $n - 1$ es par. Así que $(n - 1)/4$ siempre es entero o mitad de impar.

3. Si n es la mitad de un impar, $n = (2m + 1)/2$ con $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Entonces

$$T(n) = 6 \cdot \frac{2m + 1}{2} + 2 = 3(2m + 1) + 2 = 6m + 5,$$

que es un entero impar. Pertenecer a S .

En todos los casos $T(n) \in S$. Además, el denominador de $T(n)$ es 1 o 2, nunca mayor. □

Ejemplo 1. Verifiquemos la secuencia del ejemplo:

$$\begin{aligned} 2573 &\rightarrow \frac{2573 - 1}{4} = 643, \\ 643 &\rightarrow \frac{643 - 1}{4} = 160,5, \\ 160,5 &\rightarrow 6 \cdot 160,5 + 2 = 965, \\ 965 &\rightarrow \frac{965 - 1}{4} = 241, \\ 241 &\rightarrow \frac{241 - 1}{4} = 60, \\ 60 &\rightarrow 3 \cdot 60 + 1 = 181, \\ 181 &\rightarrow \frac{181 - 1}{4} = 45, \\ 45 &\rightarrow \frac{45 - 1}{4} = 11, \\ 11 &\rightarrow \frac{11 - 1}{4} = 2,5, \\ 2,5 &\rightarrow 6 \cdot 2,5 + 2 = 17, \\ 17 &\rightarrow \frac{17 - 1}{4} = 4, \\ 4 &\rightarrow 3 \cdot 4 + 1 = 13, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
13 &\rightarrow \frac{13-1}{4} = 3, \\
3 &\rightarrow \frac{3-1}{4} = 0,5, \\
0,5 &\rightarrow 6 \cdot 0,5 + 2 = 5, \\
5 &\rightarrow \frac{5-1}{4} = 1, \\
1 &\rightarrow \frac{1-1}{4} = 0, \\
0 &\rightarrow 3 \cdot 0 + 1 = 1, \dots
\end{aligned}$$

Se observa el ciclo $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$.

3. Pares y semienteros como puentes

Observación 2. En el sistema T , los números pares y las mitades de impares aparecen aislados entre tramos de números impares. Es decir, entre dos impares consecutivos de una órbita hay como máximo un número par o una mitad de impar.

Demostración. Por la definición de T :

- Si n es entero par, $T(n) = 3n + 1$ es impar.
- Si n es mitad de impar, $T(n) = 6n + 2$ es impar.
- Si n es entero impar, $T(n) = (n - 1)/4$ puede ser entero par, entero impar o mitad de impar. Si es impar, no hay puente; si es par o mitad de impar, el siguiente paso ya produce un impar.

Por tanto, después de un par o una mitad de impar siempre viene un impar, y antes de un par o una mitad de impar siempre hay un impar. Así que pares y semienteros son puentes de longitud 1 entre impares. $\square$

4. Reducción a los impares

Definición 3 (Función F en los impares). Definimos $F : \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ impar} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ impar}$ como la composición de T hasta volver a un impar. Es decir, si n es impar, $F(n)$ es el primer impar que se obtiene al iterar T desde n (puede obtenerse tras un solo paso si $T(n)$ ya es impar).

Proposición 2. Para n impar, escribamos $n = 8m + r$ con $r \in \{1, 3, 5, 7\}$. Entonces

$$F(n) = \begin{cases} \frac{3n+1}{4}, & \text{si } r = 1, \\ \frac{3n+1}{2}, & \text{si } r = 3, \\ \frac{n-1}{4}, & \text{si } r = 5, \\ \frac{3n+1}{2}, & \text{si } r = 7. \end{cases}$$

Equivalentemente,

$$F(n) = \begin{cases} \frac{3n+1}{4}, & \text{si } n \equiv 1 \pmod{8}, \\ \frac{3n+1}{2}, & \text{si } n \equiv 3, 7 \pmod{8}, \\ \frac{n-1}{4}, & \text{si } n \equiv 5 \pmod{8}. \end{cases}$$

Demostración. Sea $n = 8m + r$ impar.

- $r = 1$: $n = 8m + 1$. Entonces $(n - 1)/4 = 2m$, que es par. Aplicando T a $2m$ obtenemos $3(2m) + 1 = 6m + 1$, que es impar. Por tanto

$$F(n) = 6m + 1 = \frac{3(8m + 1) + 1}{4} = \frac{3n + 1}{4}.$$

- $r = 3$: $n = 8m + 3$. Entonces $(n - 1)/4 = (8m + 2)/4 = 2m + 1/2 = (4m + 1)/2$, que es mitad de impar. Aplicando T obtenemos

$$6 \cdot \frac{4m + 1}{2} + 2 = 3(4m + 1) + 2 = 12m + 5,$$

que es impar. Y

$$12m + 5 = \frac{3(8m + 3) + 1}{2} = \frac{3n + 1}{2}.$$

- $r = 5$: $n = 8m + 5$. Entonces $(n - 1)/4 = (8m + 4)/4 = 2m + 1$, que ya es impar. Por tanto

$$F(n) = 2m + 1 = \frac{n - 1}{4}.$$

- $r = 7$: $n = 8m + 7$. Entonces $(n - 1)/4 = (8m + 6)/4 = 2m + 3/2 = (4m + 3)/2$, que es mitad de impar. Aplicando T obtenemos

$$6 \cdot \frac{4m + 3}{2} + 2 = 3(4m + 3) + 2 = 12m + 11,$$

que es impar. Y

$$12m + 11 = \frac{3(8m + 7) + 1}{2} = \frac{3n + 1}{2}.$$

□

Observación 3 (Crecimiento por clases). *Aproximadamente, $F(n)/n$ vale:*

$$\frac{F(n)}{n} \approx \begin{cases} 0,75, & n \equiv 1 \pmod{8}, \\ 1,5, & n \equiv 3, 7 \pmod{8}, \\ 0,25, & n \equiv 5 \pmod{8}. \end{cases}$$

Así que las clases 3 y 7 mod 8 hacen crecer el número, mientras que las clases 1 y 5 lo hacen decrecer.

Observación 4 (Limitación de la clase módulo 8). *Saber únicamente la clase de n módulo 8 no basta para garantizar el descenso global. Por ejemplo, si $n \equiv 3 \pmod{8}$ con $n = 8m + 3$ y m impar, entonces $F(n) = 12m + 5 \equiv 1 \pmod{8}$, y el siguiente paso es $F^2(n) = (3F(n) + 1)/4 = (9n + 5)/8$, que es mayor que n para todo $n > 0$. Así que puede haber dos pasos consecutivos de crecimiento neto.*

Proposición 3 (Punto fijo). *El único punto fijo de F en los impares positivos es $n = 1$.*

Demostración. En cada rama, la ecuación $F(n) = n$ tiene una única solución:

$$n = \frac{3n + 1}{4} \implies n = 1, \quad n = \frac{3n + 1}{2} \implies n = -1, \quad n = \frac{n - 1}{4} \implies n = -\frac{1}{3}.$$

Solo la primera es un impar positivo, y $1 \equiv 1 \pmod{8}$ pertenece efectivamente a la rama correspondiente. Obsérvese que $F(1) = 1$ se obtiene a través de $1 \rightarrow 0 \rightarrow 1$ en el sistema T . □

5. La identidad afín y las rachas crecientes

Proposición 4 (Identidad fundamental). *En las ramas $n \equiv 3, 7 \pmod{8}$, donde $F(n) = (3n + 1)/2$, se tiene la identidad*

$$F(n) + 1 = \frac{3}{2}(n + 1).$$

Demostración.

$$F(n) + 1 = \frac{3n + 1}{2} + 1 = \frac{3n + 3}{2} = \frac{3}{2}(n + 1).$$

□

Observación 5 (Iteración de la identidad). *Si aplicamos F repetidamente mientras nos mantenemos en las ramas $3, 7 \pmod{8}$, la identidad se itera:*

$$F^j(n) + 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^j (n + 1).$$

Esta expresión es válida siempre que los j pasos intermedios caigan en las ramas 3 o $7 \pmod{8}$.

Proposición 5 (Duración exacta de la racha creciente). *Sea n un impar perteneciente a una de las ramas crecientes, es decir,*

$$n \equiv 3, 7 \pmod{8},$$

y escribamos

$$n + 1 = 2^a q, \quad q \text{ impar}.$$

Entonces $a = \nu_2(n + 1) \geq 2$ y la racha creciente tiene longitud exactamente

$$\boxed{j = a - 1 = \nu_2(n + 1) - 1.}$$

Más precisamente, para $0 \leq i \leq a - 1$ se tiene

$$F^i(n) + 1 = 3^i 2^{a-i} q,$$

y para $0 \leq i \leq a - 2$ los términos $F^i(n)$ pertenecen a las ramas 3 o $7 \pmod{8}$, mientras que $F^{a-1}(n)$ pertenece a una de las ramas contractivas 1 o $5 \pmod{8}$.

Demostración. Mientras la órbita permanezca en las ramas 3 o $7 \pmod{8}$, la identidad fundamental da

$$F^i(n) + 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^i (n + 1).$$

Como $n + 1 = 2^a q$, con q impar, obtenemos

$$F^i(n) + 1 = 3^i 2^{a-i} q.$$

Por tanto,

$$\nu_2(F^i(n) + 1) = a - i.$$

Un impar x pertenece a las ramas 3 o $7 \pmod{8}$ si y solo si

$$x \equiv 3 \pmod{4},$$

lo cual equivale a

$$\nu_2(x + 1) \geq 2.$$

Así, para $0 \leq i \leq a - 2$ se tiene

$$\nu_2(F^i(n) + 1) = a - i \geq 2,$$

y la órbita permanece necesariamente en una rama creciente.

En cambio, para $i = a - 1$,

$$\nu_2(F^{a-1}(n) + 1) = 1.$$

Por consiguiente,

$$F^{a-1}(n) \equiv 1 \pmod{4},$$

y, al ser impar, necesariamente

$$F^{a-1}(n) \equiv 1 \text{ o } 5 \pmod{8}.$$

La racha creciente tiene, por tanto, longitud exactamente $a - 1$. □

Corolario 1 (Clase de salida). *Con las hipótesis de la proposición anterior, sea*

$$j = a - 1.$$

Entonces

$$F^j(n) + 1 = 2 \cdot 3^j q,$$

y la clase de salida queda determinada por $3^j q \pmod{4}$:

$$F^j(n) \equiv \begin{cases} 1 \pmod{8}, & \text{si } 3^j q \equiv 1 \pmod{4}, \\ 5 \pmod{8}, & \text{si } 3^j q \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Equivalentemente, puesto que $3^j \equiv (-1)^j \pmod{4}$,

$$F^j(n) \equiv 1 \pmod{8} \iff q \equiv (-1)^j \pmod{4},$$

mientras que

$$F^j(n) \equiv 5 \pmod{8} \iff q \equiv -(-1)^j \pmod{4}.$$

Demostración. De la proposición anterior,

$$F^j(n) + 1 = 3^j 2^{a-j} q.$$

Como $j = a - 1$, resulta

$$F^j(n) + 1 = 2 \cdot 3^j q.$$

Si $3^j q \equiv 1 \pmod{4}$, entonces

$$F^j(n) + 1 \equiv 2 \pmod{8},$$

y por tanto

$$F^j(n) \equiv 1 \pmod{8}.$$

Si $3^j q \equiv 3 \pmod{4}$, entonces

$$F^j(n) + 1 \equiv 6 \pmod{8},$$

de donde

$$F^j(n) \equiv 5 \pmod{8}.$$

La formulación equivalente se obtiene de $3^j \equiv (-1)^j \pmod{4}$. □

6. Factor total hasta la primera rama contractiva

En toda esta sección, sea $n \equiv 3 \pmod{4}$ (es decir, n en una rama creciente) y escribamos

$$n + 1 = 2^a q, \quad a \geq 2, \quad q \text{ impar},$$

y sea

$$j = a - 1 = \nu_2(n + 1) - 1$$

la longitud exacta de la racha creciente. Entonces

$$F^j(n) = \left(\frac{3}{2}\right)^j (n + 1) - 1.$$

Obsérvese, para lo que sigue, que $n + 1 = 2^{j+1}q$ implica

$$n \geq 2^{j+1} - 1.$$

Distinguimos las dos posibles clases de salida.

6.1. Caso 1: $F^j(n) \equiv 1 \pmod{8}$

En este caso la primera rama contractiva es

$$F(x) = \frac{3x + 1}{4}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} F^{j+1}(n) &= \frac{3F^j(n) + 1}{4} \\ &= \frac{3\left(\left(\frac{3}{2}\right)^j (n + 1) - 1\right) + 1}{4} \\ &= \frac{3^{j+1}(n + 1)}{2^{j+2}} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\frac{F^{j+1}(n)}{n} = \frac{3^{j+1}(n + 1)}{2^{j+2}n} - \frac{1}{2n}.$$

Pero en este caso puede obtenerse una conclusión exacta, sin recurrir a una aproximación asintótica. En efecto,

$$F^{j+1}(n) - n = \frac{(3^{j+1} - 2^{j+2})n + 3^{j+1} - 2^{j+1}}{2^{j+2}}.$$

Para todo $j \geq 1$ se tiene

$$3^{j+1} > 2^{j+2},$$

pues para $j = 1$ la desigualdad es $9 > 8$, y el cociente entre ambos miembros aumenta posteriormente por un factor $3/2$. Además,

$$3^{j+1} > 2^{j+1}.$$

Ambos sumandos del numerador son entonces positivos y, por tanto,

$$\boxed{F^{j+1}(n) > n}$$

para todo $j \geq 1$.

Así, si una racha creciente desemboca en la clase 1 (mód 8), la primera rama contractiva no compensa el crecimiento acumulado.

6.2. Caso 2: $F^j(n) \equiv 5 \pmod{8}$

En este caso la primera rama contractiva es

$$F(x) = \frac{x-1}{4}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} F^{j+1}(n) &= \frac{F^j(n) - 1}{4} \\ &= \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^j (n+1) - 2}{4} \\ &= \frac{3^j(n+1)}{2^{j+2}} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Así,

$$\frac{F^{j+1}(n)}{n} = \frac{3^j(n+1)}{2^{j+2}n} - \frac{1}{2n}.$$

De nuevo podemos comparar exactamente con n :

$$F^{j+1}(n) - n = \frac{(3^j - 2^{j+2})n + 3^j - 2^{j+1}}{2^{j+2}}.$$

Para $j = 1$ ambos sumandos del numerador son negativos, pues $3 - 8 = -5$ y $3 - 4 = -1$. Para $j = 2$ y $j = 3$ el término independiente es en cambio positivo —vale $9 - 8 = 1$ y $27 - 16 = 11$ respectivamente—, de modo que la conclusión no se sigue de los signos. Basta entonces usar la cota $n \geq 2^{j+1} - 1$: el coeficiente de n es -7 para $j = 2$ y -5 para $j = 3$, y

$$-7n + 1 \leq -7 \cdot 7 + 1 = -48 < 0, \quad -5n + 11 \leq -5 \cdot 15 + 11 = -64 < 0.$$

Por consiguiente,

$$\boxed{F^{j+1}(n) < n} \quad (1 \leq j \leq 3).$$

Para $j \geq 4$ se tiene

$$3^j > 2^{j+2},$$

pues para $j = 4$ resulta $81 > 64$, y la razón entre ambos lados crece posteriormente por un factor $3/2$. Asimismo,

$$3^j > 2^{j+1}.$$

Ambos sumandos son ahora positivos y, por tanto,

$$\boxed{F^{j+1}(n) > n} \quad (j \geq 4).$$

Recordando que

$$j = \nu_2(n+1) - 1,$$

obtenemos la clasificación equivalente:

$$\begin{aligned} \nu_2(n+1) \leq 4 &\implies \text{descenso, si la salida es } 5 \pmod{8}, \\ \nu_2(n+1) \geq 5 &\implies \text{crecimiento, si la salida es } 5 \pmod{8}. \end{aligned}$$

6.3. Clasificación del episodio expansivo

Los resultados anteriores proporcionan una clasificación completa del efecto de una racha creciente seguida de la primera rama contractiva.

Sea $n \equiv 3 \pmod{4}$ con

$$n + 1 = 2^a q, \quad a \geq 2, \quad q \text{ impar},$$

y sea

$$j = a - 1 \geq 1.$$

Entonces:

clase de salida	longitud j	efecto respecto a n
1 (mód 8)	$j \geq 1$	$F^{j+1}(n) > n$
5 (mód 8)	$1 \leq j \leq 3$	$F^{j+1}(n) < n$
5 (mód 8)	$j \geq 4$	$F^{j+1}(n) > n$

Además, la clase de salida está determinada exactamente por

$$3^j q \pmod{4}.$$

Por tanto, tanto la duración de la racha como su clase de salida quedan codificadas en la descomposición

$$n + 1 = 2^a q.$$

Observación 6 (No hay un lema de descenso global trivial). *La identidad afín no solo acota las rachas crecientes, sino que determina exactamente su longitud:*

$$j = \nu_2(n + 1) - 1.$$

La primera rama contractiva puede o no compensar el crecimiento acumulado. En particular, toda salida por 1 (mód 8) produce crecimiento neto, mientras que una salida por 5 (mód 8) solo produce descenso cuando $j \leq 3$.

Por tanto, la convergencia global no puede deducirse únicamente del hecho de que toda racha creciente termine en una rama localmente contractiva. Es necesario estudiar cómo se suceden estos episodios y, en particular, la evolución de las descomposiciones

$$F^k(n) + 1 = 2^{a_k} q_k$$

a lo largo de la órbita.

7. Coordenadas 2-ádicas y mapa de retorno

La descripción anterior permite efectuar una reducción adicional de la dinámica. La idea consiste en separar, para cada impar n , la potencia de 2 contenida en $n + 1$ de su parte impar.

Definición 4 (Coordenadas (a, q)). *Para todo impar positivo n escribimos, de manera única,*

$$n + 1 = 2^a q, \quad a = \nu_2(n + 1) \geq 1, \quad q \text{ impar}.$$

Llamaremos (a, q) a las coordenadas 2-ádicas de n .

En estas coordenadas, las rachas crecientes adquieren una forma especialmente sencilla.

Proposición 6 (Linealización de las ramas crecientes). *Sea n un impar con coordenadas (a, q) y supongamos $a \geq 2$. Entonces $n \equiv 3$ o $7 \pmod{8}$ y*

$$F(n) = \frac{3n+1}{2}.$$

Las coordenadas del siguiente impar son

$$\boxed{(a, q) \mapsto (a-1, 3q)}.$$

Demostración. Como

$$n+1 = 2^a q$$

con $a \geq 2$, se tiene $n \equiv 3 \pmod{4}$, por lo que n pertenece a una de las ramas crecientes. Usando la identidad fundamental,

$$F(n) + 1 = \frac{3}{2}(n+1),$$

obtenemos

$$F(n) + 1 = \frac{3}{2} 2^a q = 2^{a-1}(3q).$$

Puesto que $3q$ es impar,

$$\nu_2(F(n) + 1) = a-1,$$

y las nuevas coordenadas son $(a-1, 3q)$. □

Corolario 2 (Reducción hasta la frontera). *Si $n+1 = 2^a q$ con $a \geq 2$, entonces después de exactamente $a-1$ pasos crecientes se alcanza un impar con coordenadas*

$$\boxed{(1, Q)}, \quad Q = 3^{a-1}q.$$

En particular,

$$F^{a-1}(n) + 1 = 2Q = 2 \cdot 3^{a-1}q.$$

Demostración. Basta iterar la transformación

$$(a, q) \mapsto (a-1, 3q) : \\ (a, q) \mapsto (a-1, 3q) \mapsto (a-2, 3^2q) \mapsto \cdots \mapsto (1, 3^{a-1}q).$$

□

Observación 7 (La frontera $a = 1$). *La dinámica dentro de una racha creciente queda así completamente determinada. Toda la información nueva aparece cuando se alcanza $a = 1$.*

Un estado de frontera tiene la forma

$$n+1 = 2Q, \quad n = 2Q-1, \quad Q \text{ impar}.$$

Según $Q \pmod{4}$, el impar n pertenece a una de las dos ramas contractivas:

$$Q \equiv 1 \pmod{4} \iff n \equiv 1 \pmod{8},$$

mientras que

$$Q \equiv 3 \pmod{4} \iff n \equiv 5 \pmod{8}.$$

7.1. Transición desde la frontera

Analizamos ahora qué ocurre al aplicar la rama contractiva correspondiente.

Proposición 7 (Transición de frontera). *Sea $(1, Q)$ un estado de frontera.*

(i) *Si $Q \equiv 1 \pmod{4}$, entonces*

$$n = 2Q - 1 \equiv 1 \pmod{8}$$

y

$$F(n) = \frac{3n + 1}{4}.$$

Si

$$r = \nu_2(3Q + 1),$$

entonces $r \geq 2$ y las coordenadas del nuevo impar son

$$\left(r - 1, \frac{3Q + 1}{2^r} \right).$$

(ii) *Si $Q \equiv 3 \pmod{4}$, entonces*

$$n = 2Q - 1 \equiv 5 \pmod{8}$$

y

$$F(n) = \frac{n - 1}{4}.$$

Si

$$r = \nu_2(Q + 1),$$

entonces $r \geq 2$ y las coordenadas del nuevo impar son

$$\left(r - 1, \frac{Q + 1}{2^r} \right).$$

Demostración. En el primer caso,

$$F(n) = \frac{3(2Q - 1) + 1}{4} = \frac{3Q - 1}{2},$$

de modo que

$$F(n) + 1 = \frac{3Q + 1}{2}.$$

Si

$$3Q + 1 = 2^r q', \quad q' \text{ impar},$$

entonces

$$F(n) + 1 = 2^{r-1} q',$$

y por tanto las nuevas coordenadas son

$$\left(r - 1, \frac{3Q + 1}{2^r} \right).$$

Como $Q \equiv 1 \pmod{4}$,

$$3Q + 1 \equiv 0 \pmod{4},$$

así que $r \geq 2$.

En el segundo caso,

$$F(n) = \frac{2Q-2}{4} = \frac{Q-1}{2},$$

y por tanto

$$F(n) + 1 = \frac{Q+1}{2}.$$

Escribiendo

$$Q+1 = 2^r q', \quad q' \text{ impar},$$

obtenemos

$$F(n) + 1 = 2^{r-1} q',$$

y las nuevas coordenadas son

$$\left(r-1, \frac{Q+1}{2^r} \right).$$

Como $Q \equiv 3 \pmod{4}$, también aquí $r \geq 2$. □

7.2. Mapa de retorno a la frontera

La proposición anterior puede combinarse con la linealización de las ramas crecientes. De este modo podemos omitir todos los pasos intermedios y pasar directamente de un estado de frontera al siguiente.

Definición 5 (Mapa de retorno). *Definimos el mapa*

$$R : \{Q \geq 1 : Q \text{ impar}\} \longrightarrow \{Q \geq 1 : Q \text{ impar}\}$$

por

$$R(Q) = \begin{cases} 3^{r-2} \frac{3Q+1}{2^r}, & Q \equiv 1 \pmod{4}, \quad r = \nu_2(3Q+1), \\ 3^{r-2} \frac{Q+1}{2^r}, & Q \equiv 3 \pmod{4}, \quad r = \nu_2(Q+1). \end{cases}$$

Proposición 8 (Interpretación dinámica de R). *Sea Q impar y sea*

$$n = 2Q - 1$$

el impar correspondiente al estado de frontera $(1, Q)$. Entonces $R(Q)$ es exactamente el parámetro Q' del siguiente estado de frontera alcanzado por la órbita de F .

Por tanto, el mapa R comprime en un solo paso una rama contractiva y la racha creciente que eventualmente la sigue.

Demostración. Supongamos primero que $Q \equiv 1 \pmod{4}$ y pongamos

$$r = \nu_2(3Q+1).$$

Por la proposición anterior, después de la rama contractiva las coordenadas son

$$\left(r-1, \frac{3Q+1}{2^r} \right).$$

Si $r = 2$, ya estamos de nuevo en la frontera $a = 1$.

Si $r > 2$, quedan exactamente

$$(r-1) - 1 = r-2$$

pasos crecientes antes de volver a $a = 1$. Cada uno multiplica por 3 la segunda coordenada. Por tanto, el nuevo parámetro de frontera es

$$Q' = 3^{r-2} \frac{3Q+1}{2^r} = R(Q).$$

El caso $Q \equiv 3 \pmod{4}$ es idéntico. Después de la rama contractiva se obtienen las coordenadas

$$\left(r-1, \frac{Q+1}{2^r}\right),$$

donde $r = \nu_2(Q+1)$, y los $r-2$ pasos crecientes posteriores producen

$$Q' = 3^{r-2} \frac{Q+1}{2^r} = R(Q).$$

□

Observación 8 (Sobre las expresiones que aparecen en R). *Las valuaciones $\nu_2(3Q+1)$ y $\nu_2(Q+1)$ que gobiernan el mapa de retorno no proceden de una identificación con la dinámica de Collatz, sino de las reducciones internas del sistema, y describen únicamente sus retornos a la frontera $\nu_2(n+1) = 1$. Que la primera de ellas coincida en forma con la valuación de la aplicación acelerada de Syracuse no es casual —ambas provienen de una expresión $3x+1$ — y la subsección 7.7 precisa en qué medida las dos dinámicas simbólicas se parecen. La relación entre este sistema y la dinámica de Collatz se establece en la Sección 9.*

7.3. Equivalencia de la convergencia

El mapa de retorno conserva toda la información necesaria para decidir la convergencia del sistema.

Teorema 1 (Reducción al mapa de retorno). *La conjetura de convergencia del sistema T es equivalente a la afirmación*

$$\boxed{\text{toda órbita positiva de } R \text{ alcanza } Q = 1.}$$

Más precisamente, toda órbita de F alcanza en un número finito de pasos un estado de frontera $(1, Q)$, y las visitas sucesivas a la frontera están dadas exactamente por

$$Q, R(Q), R^2(Q), \dots$$

Además, $Q = 1$ corresponde al impar

$$n = 2Q - 1 = 1.$$

Demostración. Sea n cualquier impar positivo y escribamos

$$n+1 = 2^a q.$$

Si $a = 1$, n ya está en la frontera. Si $a \geq 2$, la linealización de las ramas crecientes muestra que después de exactamente $a-1$ pasos se alcanza el estado

$$(1, 3^{a-1}q).$$

Por tanto, toda órbita impar alcanza la frontera en tiempo finito.

A partir de ese momento, la proposición anterior muestra que las visitas sucesivas a la frontera están descritas exactamente por las iteraciones de R .

Finalmente,

$$Q = 1 \iff n = 2Q - 1 = 1.$$

Por consiguiente, toda órbita de F alcanza 1 si y solo si toda órbita de R alcanza $Q = 1$. Como la convergencia de F a 1 es equivalente a la convergencia del sistema original T al ciclo $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$, queda demostrada la equivalencia. □

7.4. El mapa de retorno no es contractivo

La reducción anterior concentra la dinámica en una aplicación unidimensional sobre los impares, pero no proporciona por sí sola un argumento de descenso.

Ejemplo 2. *Tomemos*

$$Q = 5.$$

Como $Q \equiv 1 \pmod{4}$,

$$3Q + 1 = 16, \quad r = \nu_2(16) = 4.$$

Por tanto,

$$R(5) = 3^{4-2} \frac{16}{2^4} = 9.$$

Así,

$$\boxed{5 \mapsto 9.}$$

Ejemplo 3. *Un crecimiento más acusado aparece para*

$$Q = 21.$$

Tenemos

$$3Q + 1 = 64, \quad r = \nu_2(64) = 6,$$

y por tanto

$$R(21) = 3^{6-2} \frac{64}{2^6} = 81.$$

Así,

$$\boxed{21 \mapsto 81.}$$

Estos ejemplos muestran que R no es una aplicación contractiva respecto al orden usual.

7.5. Factores de crecimiento del mapa de retorno

La expresión de R permite localizar con precisión las ramas capaces de producir crecimiento.

Si $Q \equiv 1 \pmod{4}$, entonces

$$R(Q) = 3^{r-2} \frac{3Q+1}{2^r}, \quad r = \nu_2(3Q+1),$$

y por tanto

$$\frac{R(Q)}{Q} = \frac{3^{r-2}(3Q+1)}{2^r Q}.$$

Para Q grande, el factor principal es

$$\frac{3^{r-1}}{2^r}.$$

Si $Q \equiv 3 \pmod{4}$, entonces

$$R(Q) = 3^{r-2} \frac{Q+1}{2^r}, \quad r = \nu_2(Q+1),$$

y

$$\frac{R(Q)}{Q} = \frac{3^{r-2}(Q+1)}{2^r Q},$$

cuyo factor principal es

$$\frac{3^{r-2}}{2^r}.$$

Así, la reducción al mapa R no elimina la dependencia 2-ádica: la concentra en las valuaciones

$$\nu_2(3Q+1) \quad \text{y} \quad \nu_2(Q+1)$$

evaluadas únicamente en los sucesivos estados de frontera.

Observación 9 (Localización de la dificultad). *Las reducciones sucesivas*

$$T \longrightarrow F \longrightarrow (a, q) \longrightarrow R$$

eliminan toda la dinámica intermedia que está determinada de forma automática.

Los pares y semienteros se eliminan al pasar de T a F . Las rachas crecientes se linealizan en las coordenadas (a, q) mediante

$$(a, q) \longmapsto (a - 1, 3q).$$

Finalmente, el mapa R elimina esas rachas y conserva únicamente las visitas sucesivas a la frontera $a = 1$.

La cuestión de convergencia queda así concentrada en una pregunta unidimensional:

$$\boxed{\text{¿alcanza toda órbita de } R \text{ el valor } 1?}$$

Los ejemplos

$$R(5) = 9, \quad R(21) = 81$$

muestran que esta reformulación no proporciona un descenso monótono. Las dos subsecciones siguientes determinan exactamente dónde puede producirse el crecimiento.

7.6. Clasificación exacta de las ramas de R

Los factores de crecimiento de la subsección anterior permiten decidir, rama por rama, cuándo el mapa de retorno crece y cuándo decrece.

Proposición 9 (Clasificación de las ramas). *Sea $Q > 1$ impar.*

1. *Si $Q \equiv 1 \pmod{4}$ y $r = \nu_2(3Q + 1)$, entonces*

$$R(Q) < Q \text{ si } r = 2, \quad R(Q) > Q \text{ si } r \geq 3.$$

2. *Si $Q \equiv 3 \pmod{4}$ y $r = \nu_2(Q + 1)$, entonces*

$$R(Q) < Q \text{ si } 2 \leq r \leq 5, \quad R(Q) > Q \text{ si } r \geq 6.$$

Demostración. En el primer caso,

$$R(Q) - Q = \frac{(3^{r-1} - 2^r)Q + 3^{r-2}}{2^r}.$$

Para $r = 2$ el numerador es $(3 - 4)Q + 1 = 1 - Q < 0$, pues $Q > 1$. Para $r \geq 3$ se tiene $3^{r-1} > 2^r$, ya que esa desigualdad equivale a $(3/2)^{r-1} > 2$ y se cumple desde $r = 3$, donde $9 > 8$; ambos sumandos del numerador son entonces positivos.

En el segundo caso,

$$R(Q) - Q = \frac{(3^{r-2} - 2^r)Q + 3^{r-2}}{2^r}.$$

Para $r \geq 6$ se tiene $3^{r-2} > 2^r$, equivalente a $(3/2)^{r-2} > 4$, que se cumple desde $r = 6$, donde $81 > 64$; ambos sumandos son positivos.

Para $2 \leq r \leq 5$ el coeficiente $3^{r-2} - 2^r$ es negativo, pero el término independiente es positivo, de modo que la conclusión no se sigue de los signos. Obsérvese que $\nu_2(Q + 1) = r$ obliga a $Q \geq 2^r - 1$. Basta entonces comprobar

$$(2^r - 3^{r-2})(2^r - 1) > 3^{r-2}$$

en los cuatro casos: $3 \cdot 3 > 1$, $5 \cdot 7 > 3$, $7 \cdot 15 > 9$ y $5 \cdot 31 > 27$. □

Corolario 3 (Las clases expansivas). *Sea*

$$\mathcal{E} = \{ Q \text{ impar} : Q \equiv 5 \pmod{8} \text{ o } Q \equiv 63 \pmod{64} \}.$$

Para todo impar $Q > 1$ se tiene $R(Q) > Q$ si y solo si $Q \in \mathcal{E}$, y $R(Q) < Q$ en caso contrario. Además $R(1) = 1$.

Las dos clases que forman $\mathcal{E}$ son disjuntas y su densidad entre los impares es

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{32} = \frac{9}{32},$$

de modo que, de las treinta y dos clases impares módulo 64, veintitrés son contractivas y solo nueve pueden producir crecimiento.

Demostración. En la primera rama, $r = \nu_2(3Q + 1) \geq 3$ equivale a $8 \mid 3Q + 1$, esto es $3Q \equiv 7 \pmod{8}$; como $3^{-1} \equiv 3 \pmod{8}$, ello equivale a $Q \equiv 21 \equiv 5 \pmod{8}$, que en efecto implica $Q \equiv 1 \pmod{4}$.

En la segunda, $r = \nu_2(Q + 1) \geq 6$ equivale a $64 \mid Q + 1$, es decir $Q \equiv 63 \pmod{64}$, que implica $Q \equiv 3 \pmod{4}$. Como $63 \equiv 7 \pmod{8}$, las dos clases son disjuntas.

La clase 5 (mód 8) reúne ocho de las treinta y dos clases impares módulo 64, y 63 (mód 64) aporta una más. $\square$

Observación 10 (Salida de los episodios expansivos). *Si $R(Q) > Q$, entonces $3 \mid R(Q)$. En efecto, el Corolario 3 sitúa el crecimiento en $r \geq 3$ para la primera rama y $r \geq 6$ para la segunda, y en ambos casos el factor 3^{r-2} de la definición de R contiene al menos un 3.*

Esto restringe el conjunto en que puede caer la salida de un episodio expansivo, pero no impide que el crecimiento se encadene: el Corolario 7 muestra que hay rachas expansivas de cualquier longitud.

7.7. Estructura de ramas completas y dinámica simbólica

La clasificación de la subsección anterior admite una lectura más fuerte si se extiende R a los enteros 2-ádicos. Escribimos $\Omega = \mathbb{Z}_2^\times$ para el conjunto de los impares 2-ádicos y μ para la restricción a Ω de la medida de Haar aditiva de $\mathbb{Z}_2$, normalizada para que $\mu(\Omega) = 1$. Las fórmulas de la Definición 5 tienen sentido en Ω salvo en los dos puntos singulares donde alguna de las valuaciones se hace infinita, es decir, donde $3Q + 1 = 0$ o $Q + 1 = 0$. Denotamos por

$$\tilde{R} : \Omega \setminus \{-1, -\frac{1}{3}\} \longrightarrow \Omega$$

el mapa parcial dado por esas fórmulas, y ponemos

$$\mathcal{N} = \left\{ Q \in \Omega : \tilde{R}^j(Q) \in \{-1, -\frac{1}{3}\} \text{ para algún } j \geq 0 \right\}, \quad \Omega^* = \Omega \setminus \mathcal{N}.$$

Por construcción $\tilde{R}(\Omega^*) \subseteq \Omega^*$, y llamamos $R = \tilde{R}|_{\Omega^*} : \Omega^* \rightarrow \Omega^*$; sobre los impares positivos coincide con el mapa de la Definición 5. El conjunto $\mathcal{N}$ es numerable: por el Teorema 2, cada punto tiene a lo sumo una preimagen por $\tilde{R}$ en cada cilindro elemental y, por tanto, un conjunto numerable de preimágenes; por inducción, las preimágenes de cualquier orden de los dos puntos singulares forman un conjunto numerable. En consecuencia $\mu(\mathcal{N}) = 0$.

Definición 6 (Cilindros elementales). *Para $r \geq 2$ definimos*

$$A_r = \{ Q \in \Omega : \nu_2(3Q + 1) = r \}, \quad B_r = \{ Q \in \Omega : \nu_2(Q + 1) = r \},$$

y $\mathcal{P} = \{A_r, B_r : r \geq 2\}$.

Lema 1 (La partición). *Los conjuntos de $\mathcal{P}$ son disjuntos dos a dos, cubren Ω salvo un conjunto de medida nula, y*

$$A_r \subset \{Q \equiv 1 \pmod{4}\}, \quad B_r \subset \{Q \equiv 3 \pmod{4}\}, \quad \mu(A_r) = \mu(B_r) = 2^{-r}.$$

Demostración. Si $Q \equiv 1 \pmod{4}$, entonces $Q + 1 \equiv 2 \pmod{4}$ y $\nu_2(Q + 1) = 1$, de modo que Q no pertenece a ningún B_r con $r \geq 2$; y $3Q + 1 \equiv 0 \pmod{4}$, luego $\nu_2(3Q + 1) \geq 2$. Si $Q \equiv 3 \pmod{4}$ ocurre lo simétrico. La condición $r \geq 2$ selecciona, pues, automáticamente la clase módulo 4, y los cilindros son disjuntos.

Para las medidas: $\mu\{Q \equiv 1 \pmod{4}\} = 1/2$ y, condicionado a ello, $\nu_2(3Q + 1) = r$ con probabilidad $2^{-(r-1)}$, pues $Q \mapsto 3Q + 1$ es una biyección afín de $\mathbb{Z}_2$ que preserva Haar. Luego $\mu(A_r) = 2^{-r}$, y análogamente $\mu(B_r) = 2^{-r}$. Finalmente $\sum_{r \geq 2} (\mu(A_r) + \mu(B_r)) = 2 \sum_{r \geq 2} 2^{-r} = 1$. $\square$

Teorema 2 (Ramas completas). *Para cada $C \in \mathcal{P}$, la restricción $\tilde{R}|_C : C \rightarrow \Omega$ es una biyección que transforma la medida condicional normalizada de C en μ . Por restricción, induce una biyección $R|_{C \cap \Omega^*} : C \cap \Omega^* \rightarrow \Omega^*$.*

Demostración. Sea $C = A_r$ y parametricemos A_r por $u \in \Omega$ mediante $3Q + 1 = 2^r u$, es decir $Q = (2^r u - 1)/3$, que es la inversa de una biyección porque 3 es una unidad 2-ádica y $\nu_2(3Q + 1) = \nu_2(2^r u) = r$. Con esa parametrización $R(Q) = 3^{r-2}u$.

Veamos que u tiene distribución μ . El conjunto A_r es una clase residual módulo 2^{r+1} , y la condición $u \equiv u_0 \pmod{2^m}$ corresponde a una única clase de Q módulo 2^{r+m} contenida en ella. Como una clase módulo 2^{r+1} contiene exactamente 2^{m-1} clases módulo 2^{r+m} , la medida condicional de cada una es $2^{-(m-1)}$, que es justamente la medida que μ asigna en Ω a la clase $u \equiv u_0 \pmod{2^m}$. Finalmente, la multiplicación por la unidad 3^{r-2} es una biyección de Ω que preserva μ .

Para la última afirmación, basta observar que $Q \in C$ pertenece a Ω^* si y solo si $\tilde{R}(Q) \in \Omega^*$, porque C no contiene puntos singulares.

El caso $C = B_r$ es idéntico, con $Q + 1 = 2^r u$ y $Q = 2^r u - 1$.

Registramos las inversas, que se usarán más abajo:

$$\phi_{A_r}(v) = -\frac{1}{3} + 2^r 3^{-(r-1)}v, \quad \phi_{B_r}(v) = -1 + 2^r 3^{-(r-2)}v,$$

ambas de la forma $\phi_C(v) = a_C + 2^r \varepsilon_C v$ con $\varepsilon_C \in \mathbb{Z}_2^\times$. $\square$

Obsérvese que el teorema no distingue entre ramas expansivas y contractivas: la demostración no usa el valor de r más allá de $r \geq 2$.

Corolario 4 (Independencia de los símbolos). *Sea $X_j(Q) \in \mathcal{P}$ el cilindro que contiene a $R^j(Q)$. Para toda palabra finita $C_0 C_1 \cdots C_{k-1}$ de elementos de $\mathcal{P}$,*

$$\mu\{Q : X_0 = C_0, \dots, X_{k-1} = C_{k-1}\} = \prod_{i=0}^{k-1} \mu(C_i).$$

El itinerario es, por tanto, un proceso de Bernoulli con $\Pr(A_r) = \Pr(B_r) = 2^{-r}$.

Demostración. Inducción sobre k . El caso $k = 1$ es el Lema 1. Para el paso, el Teorema 2 dice que la distribución de $R(Q)$ condicionada a $Q \in C_0$ vuelve a ser μ , de modo que la probabilidad condicional de que los $k-1$ símbolos siguientes sean $C_1 \cdots C_{k-1}$ es la misma que la incondicional. $\square$

Proposición 10 (La codificación es inyectiva). *Si $X_j(Q)$ tiene índice r_j , la palabra $X_0 \cdots X_{k-1}$ determina Q módulo $2^{r_0 + \cdots + r_{k-1} + 1}$. Como $r_j \geq 2$, ese módulo tiende a infinito y la aplicación $Q \mapsto (X_0, X_1, \dots)$ es inyectiva sobre Ω^* .*

Demostración. El cilindro $[C_0 \cdots C_{k-1}]$ es la imagen de Ω por la composición de las ramas inversas del Teorema 2. Cada una tiene la forma $\phi_C(v) = a_C + 2^r \varepsilon_C v$ con ε_C unidad, de modo que la composición es

$$\phi_{C_0} \circ \cdots \circ \phi_{C_{k-1}}(v) = a + 2^{r_0 + \cdots + r_{k-1}} \varepsilon v, \quad \varepsilon \in \mathbb{Z}_2^\times,$$

para ciertos $a \in \mathbb{Z}_2$ y ε que dependen solo de la palabra. Como v recorre las unidades, $2^s \varepsilon v$ recorre los elementos de valuación exactamente $s = r_0 + \cdots + r_{k-1}$, y la imagen es una única clase residual módulo 2^{s+1} . Siendo $r_j \geq 2$, se tiene $s \rightarrow \infty$ y la codificación separa puntos. $\square$

Corolario 5 (Conjugación). *La codificación es una biyección de Ω^* sobre $\mathcal{P}^\mathbb{N}$, homeomorfismo para la topología 2-ádica y la topología producto, e isomorfismo de espacios de medida entre (Ω, R, μ) y el desplazamiento unilateral de Bernoulli sobre el alfabeto numerable $\mathcal{P}$ con pesos 2^{-r} . En particular R preserva μ y es ergódica.*

Demostración. La inyectividad es la Proposición 10. Para la sobreyectividad, dada una sucesión $(C_0, C_1, \dots)$, consideramos los cilindros completos en Ω , antes de retirar $\mathcal{N}$,

$$K_k = \phi_{C_0} \circ \cdots \circ \phi_{C_{k-1}}(\Omega).$$

Son clases residuales módulo 2^{s_k+1} con $s_k \rightarrow \infty$: no vacías, compactas y encajadas, con diámetros que tienden a cero, de modo que su intersección es un único punto Q . (Sus intersecciones con Ω^* no son, en general, cerradas en Ω ; por eso se argumenta con los K_k .) Para cada k , las k primeras iteraciones de Q pertenecen a las ramas prescritas; por tanto ninguna iteración alcanza un punto singular, $Q \in \Omega^*$ y el itinerario de Q es la sucesión dada. Un punto de $\mathcal{N}$ tiene itinerario finito y no pertenece, por tanto, a ninguna de estas intersecciones. La continuidad en ambos sentidos se sigue de que la preimagen de un cilindro es una clase residual y de que toda clase residual módulo 2^m es unión de cilindros. $\square$

Observación 11 (Entropía). *De los pesos se sigue*

$$h_\mu(R) = - \sum_{r \geq 2} 2 \cdot 2^{-r} \log 2^{-r} = 2 \log 2 \sum_{r \geq 2} \frac{r}{2^r} = 3 \log 2,$$

y el número medio de dígitos binarios de Q consumidos por cada aplicación de R es $\sum_{r \geq 2} 2r 2^{-r} = 3$. El símbolo se descompone en dos partes independientes: un bit que indica la rama, con $\Pr(A) = \Pr(B) = 1/2$, y el entero $r-1$, que condicionado a la rama es geométrico de media 2. De ahí

$$h_\mu(R) = \underbrace{\log 2}_{\text{rama}} + \underbrace{2 \log 2}_{r-1} = 3 \log 2.$$

Corolario 6 (Las expansiones son Bernoulli). *Con la notación del Corolario 3,*

$$\mathcal{E} = \bigcup_{r \geq 3} A_r \cup \bigcup_{r \geq 6} B_r, \quad p_E := \mu(\mathcal{E}) = \sum_{r \geq 3} 2^{-r} + \sum_{r \geq 6} 2^{-r} = \frac{1}{4} + \frac{1}{32} = \frac{9}{32},$$

y $p_C = 23/32$. La proyección del itinerario al alfabeto $\{E, C\}$ es un proceso de Bernoulli de parámetro $9/32$: para toda palabra w con e expansiones y c contracciones,

$$\mu([w]) = \left(\frac{9}{32} \right)^e \left(\frac{23}{32} \right)^c,$$

independientemente del orden de los símbolos.

Corolario 7 (Rachas expansivas). Sea $\mathcal{E}_k$ el conjunto de puntos que inician k expansiones consecutivas. Entonces $\mu(\mathcal{E}_k) = (9/32)^k$. Si L denota la longitud de la racha expansiva iniciada en un punto de $\mathcal{E}$,

$$\Pr(L = k \mid Q \in \mathcal{E}) = \left(\frac{9}{32}\right)^{k-1} \frac{23}{32}, \quad \mathbb{E}[L \mid Q \in \mathcal{E}] = \frac{32}{23} \approx 1,391.$$

Aquí $23/32$ es la probabilidad de terminar la racha, no la de las clases contractivas del Corolario 3, aunque ambas coincidan numéricamente. En particular las rachas expansivas arbitrariamente largas existen, con probabilidad exponencialmente pequeña en su longitud. Finalmente, $\mathcal{E}_\infty = \bigcap_k \mathcal{E}_k$ satisface $\mathcal{E}_\infty \subseteq \mathcal{E}_k$ para todo k , de donde $\mu(\mathcal{E}_\infty) = 0$ por monotonía.

Proposición 11 (Deriva). Los factores principales de $R(Q)/Q$ son $3^{r-1}/2^r$ en la rama A_r y $3^{r-2}/2^r$ en la rama B_r . Definida como función del símbolo X_j , la variable $\Lambda_j = \log(\text{factor principal})$ queda determinada por él; por el Corolario 4 los Λ_j son independientes e idénticamente distribuidos, de esperanza

$$\sum_{r \geq 2} \frac{1}{2^r} \left[\log \frac{3^{r-1}}{2^r} + \log \frac{3^{r-2}}{2^r} \right] = \frac{3}{2} \log 3 - 3 \log 2 = \log \frac{3^{3/2}}{8} \approx -0,4315,$$

donde se han usado $\sum_{r \geq 2} 2^{-r} = 1/2$ y $\sum_{r \geq 2} r 2^{-r} = 3/2$. Por la ley fuerte de los grandes números, para μ -casi todo Q la media de los k primeros logaritmos converge a ese valor.

Observación 12 (Qué gobierna esa deriva). La Proposición 11 controla el producto de los factores principales, no el cociente real $R^k(Q)/Q$. Para una órbita de enteros positivos $Q_i = R^i(Q_0)$, el cociente $R^k(Q_0)/Q_0$ difiere del producto de los factores principales en el producto de los factores correctivos

$$1 + \frac{1}{3Q_i} \quad o \quad 1 + \frac{1}{Q_i},$$

según la rama; en los enteros positivos cada uno es mayor que 1 y próximo a 1 cuando Q_i es grande. Acotar ese producto es una cuestión arquimediana, ajena a la medida 2-ádica, que aquí no abordamos.

Observación 13 (Alcance de esta subsección). Los resultados estructurales anteriores (ramas completas, inyectividad de la codificación, conjugación) se verifican en todo punto de Ω^* , y en particular se aplican a los enteros positivos. En cambio, las conclusiones estadísticas asintóticas (frecuencias, deriva, rachas típicas) se formulan para μ -casi todo punto. Los enteros positivos forman un subconjunto numerable de Ω y tienen medida de Haar nula, de modo que esas conclusiones no implican que una órbita entera positiva concreta tenga el comportamiento estadístico típico, que es lo que la Conjetura 1 requeriría.

El propio sistema ilustra esta limitación. Como $R(1) = 1$ y $1 \in A_2$, el itinerario de 1 es $A_2 A_2 A_2 \dots$, y toda órbita que alcance 1 tiene, desde ese momento, ese itinerario constante; su frecuencia asintótica de etiquetas expansivas es 0, no $9/32$. Por tanto, si la conjetura es cierta, todos los enteros positivos tienen itinerarios estadísticamente excepcionales respecto de la medida de Haar.

Conviene señalar que el mecanismo empleado no es nuevo. La distribución de los vectores de paridad de la función $3x + 1$ ya aparece en Terras [4]; Lagarias [1] estableció que la función $3x + 1$, extendida a $\mathbb{Z}_2$, es conjugada al desplazamiento binario mediante la aplicación del vector de paridades, y Tao [3] observa que para un impar elegido al azar la valuación $\nu_2(3n + 1)$ sigue una distribución geométrica de media 2, con $\Pr = 2^{-r}$, y que la aplicación de Syracuse se extiende a los impares 2-ádicos. Lo específico de esta subsección no es la existencia de una codificación de Bernoulli, sino que el mapa de retorno del sistema estudiado en estas notas, obtenido por una vía enteramente distinta, resulta pertenecer a esa clase, con el alfabeto doble $\{A_r, B_r\}$, entropía $3 \log 2$ y una proyección a las etiquetas expansiva/contractiva de parámetro $9/32$.

La distancia entre un enunciado μ -casi seguro y un enunciado sobre cada órbita entera es, precisamente, el obstáculo que separa esta subsección de la Conjetura 1; la conjugación de Lagarias no ha permitido salvarla en el caso de Collatz.

8. Convergencia: conjetura

Conjetura 1 (Convergencia al ciclo 0–1). *Toda órbita de T en S termina en el ciclo $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$. Equivalentemente, toda órbita de F en los impares positivos termina en 1.*

Observación 14. *La conjetura está respaldada por:*

- Resultado estructural. *El único punto fijo positivo de F es 1 (Proposición 3).*
- Evidencia computacional. *Se han recorrido las órbitas de F de los 10^6 impares positivos menores que 2×10^6 , con aritmética entera exacta: todas alcanzan 1 y ninguna presenta un ciclo no trivial. Con las convenciones $F^0(n) = n$, máximo $M(n) = \max_{k \geq 0} F^k(n)$ (que incluye el estado inicial) y tiempo igual al número de pasos de F hasta la primera llegada a 1, la mayor excursión relativa $M(n)/n$ corresponde a $n = 1\,212\,415$, con $M(n) = 46\,548\,912\,269$ ($M(n)/n \approx 38\,393,5$); el mayor tiempo, a $n = 1\,723\,519$, con 250 pasos; y el mayor máximo absoluto, $52\,304\,792\,741$, se alcanza desde $n = 1\,988\,859$. Todas estas magnitudes se refieren a F , no a T . El programa `verificar_sistema_T.py`, depositado junto a este escrito, reproduce estos datos y comprueba también las Proposiciones 5, 8 y 12, los Corolarios 1 y 3 y las medidas de los cilindros del Lema 1.*
- Motivación heurística. *La deriva logarítmica negativa que la estructura de ramas completas hace exacta bajo la medida de Haar (Proposición 11). El mero hecho de que $23/32$ de las clases sean contractivas (Corolario 3) no bastaría por sí solo: también importan las magnitudes de las expansiones y su distribución a lo largo de las órbitas, que es lo que la deriva cuantifica.*

Ninguno de estos hechos constituye una demostración. La identidad afín y el cálculo del factor total muestran que el sistema comparte con Collatz la dependencia de una valuación 2-ádica, aunque en una forma más transparente.

9. Una coincidencia con la aplicación acelerada de Collatz

Denotemos por σ la forma acelerada de la función de Collatz sobre los enteros impares,

$$\sigma(n) = \frac{3n+1}{2^{\nu_2(3n+1)}},$$

que lleva cada impar al siguiente impar de su trayectoria y es, por tanto, el análogo de nuestra F (Definición 3). Nada de lo que sigue interviene en las demostraciones de las secciones anteriores. Adviértase que el símbolo T queda reservado para la función de transición de la Definición 2.

Proposición 12. *Para todo impar n con $n \not\equiv 5 \pmod{8}$ se tiene $F(n) = \sigma(n)$. En la clase restante, $n \equiv 5 \pmod{8}$, la igualdad se da únicamente para $n = 5$.*

Demostración. Si $n = 4k+3$, entonces $3n+1 = 2(6k+5)$ con $6k+5$ impar, luego $\nu_2(3n+1) = 1$ y $\sigma(n) = (3n+1)/2 = F(n)$. Si $n = 8j+1$, entonces $3n+1 = 4(6j+1)$ con $6j+1$ impar, luego $\nu_2(3n+1) = 2$ y $\sigma(n) = (3n+1)/4 = F(n)$.

Si $n = 8j+5$, entonces $3n+1 = 8(3j+2)$, de modo que $\nu_2(3n+1) \geq 3$ y $\sigma(n)$ es la parte impar de $3j+2$, mientras que $F(n) = (n-1)/4 = 2j+1$. La igualdad exige $3j+2 = 2^t(2j+1)$ para algún $t \geq 0$: para $t = 0$ resulta $j = -1$, imposible; para $t = 1$, $j = 0$; y para $t \geq 2$, $2^t(2j+1) \geq 8j+4 > 3j+2$. El único caso es $j = 0$, es decir $n = 5$. $\square$

Observación 15 (Una sola rama sustituida). *La coincidencia falla exactamente donde $\nu_2(3n+1)$ deja de estar acotada. En la clase $n \equiv 5 \pmod{8}$ se tiene $3n+1 = 8(3j+2)$, de modo que $\nu_2(3n+1) = 3 + \nu_2(3j+2)$ puede ser arbitrariamente grande; ahí nuestra F aplica en su lugar la contracción afín fija $n \mapsto (n-1)/4$.*

Esto da una explicación de la Proposición 2: la transición de impares depende solo de n módulo 8 porque la valuación no acotada no interviene en ninguna de las cuatro ramas. Y da también una razón de que reaparezca en el mapa de retorno de la Sección 7: puede ausentarse de un paso aislado sin ausentarse de la sucesión de visitas a la frontera $\nu_2(n+1) = 1$.

Conviene precisar el alcance de la coincidencia, que es puntual y no orbital. Las dos aplicaciones generan sucesiones distintas: basta un paso por la clase 5 (mód 8) para que se aparten, y el caso mínimo es $n = 13$, donde $\sigma(13) = 5$ mientras que $F(13) = 3$. También difieren sus imágenes, pues $3n+1 \equiv 1 \pmod{3}$ impide que σ produzca múltiplos de 3, mientras que la rama $(n-1)/4$ sí los produce, exactamente cuando $n \equiv 13 \pmod{24}$; los primeros casos son $13 \mapsto 3$, $37 \mapsto 9$ y $61 \mapsto 15$. La coincidencia anterior no proporciona, por sí sola, ninguna reducción entre la convergencia de este sistema y la conjetura de Collatz, en ninguna de las dos direcciones.

10. Conclusiones

1. El sistema T está bien definido y es cerrado en el conjunto de enteros no negativos y mitades de impares.
2. Los pares y semienteros actúan como puentes de longitud 1 entre tramos de impares.
3. La dinámica en los impares se reduce a una función F determinista que depende solo de n mód 8.
4. El único punto fijo positivo de F es 1.
5. La identidad $F(n) + 1 = \frac{3}{2}(n+1)$ controla las rachas crecientes, cuya duración es exactamente $\nu_2(n+1) - 1$.
6. El factor total hasta la primera rama contractiva puede ser mayor que 1, así que no hay un lema de descenso global trivial.
7. La función F coincide con la aplicación acelerada de Collatz en tres de las cuatro clases módulo 8 y sustituye la restante, aquella en que $\nu_2(3n+1)$ no está acotada, por una contracción afín fija. Los dos sistemas no generan las mismas órbitas ni tienen la misma imagen, y la coincidencia anterior no proporciona, por sí sola, ninguna reducción entre la convergencia de este sistema y la conjetura de Collatz, en ninguna de las dos direcciones.
8. La convergencia al ciclo 0–1 es una conjetura plausible, pero no demostrada.
9. La dinámica puede comprimirse finalmente en un mapa de retorno R sobre los impares, obtenido al considerar únicamente las visitas a la frontera $\nu_2(n+1) = 1$. La convergencia del sistema original es equivalente a que toda órbita positiva de R alcance 1; sin embargo, R no es contractivo, por lo que esta reducción localiza la dificultad sin resolverla.
10. El crecimiento del mapa de retorno queda localizado exactamente en las clases $Q \equiv 5 \pmod{8}$ y $Q \equiv 63 \pmod{64}$, que reúnen $9/32$ de los impares; en las restantes $23/32$ se tiene $R(Q) < Q$ para todo $Q > 1$. Extendido R a los impares 2-ádicos, sus ramas son completas (Teorema 2), de donde el itinerario es un proceso de Bernoulli con pesos 2^{-r} , la entropía vale $3 \log 2$ y las rachas expansivas son geométricas de media $32/23$. Fuera del conjunto numerable de puntos que alcanzan una singularidad, el mapa es conjugado al desplazamiento unilateral sobre el alfabeto de ramas; bajo la medida de Haar, los símbolos

son independientes con pesos 2^{-r} y la proyección a las etiquetas expansiva/contractiva tiene parámetro $9/32$. Las conclusiones estadísticas casi seguras no determinan el comportamiento de cada órbita entera positiva, que tiene medida de Haar nula; ahí sigue estando el obstáculo.

Referencias

- [1] J. C. Lagarias, *The $3x + 1$ problem and its generalizations*, American Mathematical Monthly **92** (1985), n.º 1, 3–23.
- [2] J. C. Lagarias (ed.), *The Ultimate Challenge: The $3x + 1$ Problem*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [3] T. Tao, *Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values*, Forum of Mathematics, Pi **10** (2022), e12, 1–56. DOI: [10.1017/fmp.2022.8](https://doi.org/10.1017/fmp.2022.8). Preprint: arXiv:1909.03562 (2019).
- [4] R. Terras, *A stopping time problem on the positive integers*, Acta Arithmetica **30** (1976), 241–252.

A. Tabla de transiciones impar a impar

Para $n = 8m + r$ impar, la siguiente tabla resume $F(n)$:

r	n	$F(n)$	$F(n)/n$ aprox.
1	$8m + 1$	$6m + 1 = \frac{3n + 1}{4}$	0,75
3	$8m + 3$	$12m + 5 = \frac{3n + 1}{2}$	1,5
5	$8m + 5$	$2m + 1 = \frac{n - 1}{4}$	0,25
7	$8m + 7$	$12m + 11 = \frac{3n + 1}{2}$	1,5

B. Ejemplos de órbitas en impares

$1 \rightarrow 1,$
 $3 \rightarrow 5 \rightarrow 1,$
 $5 \rightarrow 1,$
 $7 \rightarrow 11 \rightarrow 17 \rightarrow 13 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 1,$
 $9 \rightarrow 7 \rightarrow 11 \rightarrow 17 \rightarrow 13 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 1,$
 $11 \rightarrow 17 \rightarrow 13 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 1,$
 $13 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 1,$
 $15 \rightarrow 23 \rightarrow 35 \rightarrow 53 \rightarrow 13 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 1,$
 $17 \rightarrow 13 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 1,$
 $19 \rightarrow 29 \rightarrow 7 \rightarrow 11 \rightarrow 17 \rightarrow 13 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 1.$

C. Cálculo detallado del factor total

Caso $F^j(n) \equiv 1 \pmod{8}$

$$F^{j+1}(n) = \frac{3F^j(n) + 1}{4} = \frac{3 \left(\left(\frac{3}{2} \right)^j (n+1) - 1 \right) + 1}{4} = \frac{3^{j+1}(n+1)}{2^{j+1} \cdot 2} - \frac{2}{4} = \frac{3^{j+1}(n+1)}{2^{j+2}} - \frac{1}{2}.$$

Dividiendo por n :

$$\frac{F^{j+1}(n)}{n} = \frac{3^{j+1}(n+1)}{2^{j+2}n} - \frac{1}{2n}.$$

Caso $F^j(n) \equiv 5 \pmod{8}$

$$F^{j+1}(n) = \frac{F^j(n) - 1}{4} = \frac{\left(\frac{3}{2} \right)^j (n+1) - 2}{4} = \frac{3^j(n+1)}{2^{j+2}} - \frac{1}{2}.$$

Dividiendo por n :

$$\frac{F^{j+1}(n)}{n} = \frac{3^j(n+1)}{2^{j+2}n} - \frac{1}{2n}.$$

Umbrales

- Caso 1 mód 8: factor > 1 para todo $j \geq 1$.
- Caso 5 mód 8: factor < 1 si $j \leq 3$, usando $n \geq 2^{j+1} - 1$; factor > 1 si $j \geq 4$.