

Inexistencia de ciclos con una única expansión en un mapa de retorno sobre los impares

Miguel Cerdá Bennassar

Septiembre de 2026

Resumen

Se estudian los ciclos periódicos de un mapa de retorno R sobre los enteros impares positivos, obtenido previamente a partir de un sistema dinámico sobre enteros y mitades de impares. El mapa posee dos familias de ramas, A_r y B_r , parametrizadas por una valuación 2-ádica; las expansivas están completamente clasificadas y las contractivas son exactamente cinco.

Demostramos que no existe ningún ciclo periódico positivo no trivial de R que contenga exactamente una rama expansiva. La demostración confronta dos cotas para el parámetro d asociado a un ciclo. La superior procede de una cota exponencial para la forma lineal $\Lambda = d \log 3 - S \log(3/2)$ combinada con el resultado de Laurent, Mignotte y Nesterenko sobre formas lineales en dos logaritmos, y da $d \leq 65$. La inferior procede de la teoría de fracciones continuas aplicada a los convergentes de $\log 3 / \log(3/2)$, junto con la verificación —inmediata— de que ningún impar menor que 10^5 es el mínimo de un ciclo, y da $d \geq 179$. La contradicción es inmediata, y el cómputo que la sostiene se reproduce en segundos.

Se obtiene además, con independencia de la demostración anterior, una representación inversa exacta del bloque contractivo y un lema de reordenamiento: fijadas las multiplicidades de las cinco ramas contractivas, el término aditivo de la composición alcanza sus extremos en dos órdenes canónicos. Estos resultados permiten una verificación independiente del teorema por enumeración exhaustiva.

Índice

1. Introducción	2
2. El mapa de retorno y sus ramas	3
3. Composición afín de una palabra	4
4. Ecuación exacta de un ciclo	4
5. Identidad multiplicativa y cota por el mínimo	5
6. Contracción uniforme de las cinco ramas	5
7. Cotas para la profundidad de la expansión	6

8. Cota exponencial para la forma lineal	6
9. Cota superior: $d \leq 65$	7
10. Cota inferior: $d \geq 179$	8
11. Demostración del resultado principal	9
12. Estructura combinatoria del bloque contractivo	9
13. Verificación independiente por enumeración	10
14. La parte computacional	11
15. Relación con el estudio clásico de ciclos tipo Collatz	12
16. Conclusiones	12

1. Introducción

En [1] se introdujo un sistema dinámico cerrado sobre los enteros no negativos y las mitades de impares, definido por tres reglas afines, y se redujo su dinámica sobre los impares a una función F que depende únicamente de la clase módulo 8 y, por etapas, a un mapa de retorno R sobre los impares. Allí se establecen la clasificación exacta de las ramas de R y el hecho de que las contractivas son exactamente cinco, resultados que este escrito da por conocidos y recuerda en la Sección 2. Se prueba además que, extendido R a los impares 2-ádicos, sus ramas son completas y su dinámica simbólica es un desplazamiento de Bernoulli.

La descripción métrica 2-ádica, sin embargo, no decide el comportamiento de una órbita entera concreta. En particular, la unicidad del ciclo elemental no se deduce de la predominancia métrica de las ramas contractivas. El problema de los ciclos exige incorporar información arquimediana y diofántica. El presente escrito aborda el caso más sencillo de periodicidad no trivial.

Teorema 1.1 (Resultado principal). *No existe ningún ciclo periódico positivo no trivial de R que contenga exactamente una rama expansiva.*

La demostración se completa en la Sección 11. Su esqueleto es una confrontación de cotas: la Sección 9 establece que un ciclo semejante tendría $d \leq 65$, y la Sección 10 que tendría $d \geq 179$, donde d es el parámetro entero definido en (2).

Conviene declarar desde el principio la relación con la literatura clásica. El Teorema 1.1 es el análogo, para el mapa R , del teorema que Steiner demostró en 1977 para el problema $3n+1$ [3]: la inexistencia de 1-ciclos, es decir, de ciclos con una única expansión. La estrategia que seguimos aquí —acotar superiormente, por vía arquimediana, una forma lineal en $\log 2$ y $\log 3$, y cerrar con cotas inferiores para formas lineales en logaritmos y con fracciones continuas— es también la suya. Ninguno de esos ingredientes es original de este escrito. Lo específico es la

estructura de ramas de R y las consecuencias combinatorias que de ella se derivan, expuestas en la Sección 12; la Sección 15 detalla esa delimitación.

Parte de la demostración es un cómputo finito. La Sección 14 precisa qué se calcula exactamente, con qué método y con qué márgenes.

2. El mapa de retorno y sus ramas

Sea Q un entero impar positivo. El mapa de retorno de [1] es

$$R(Q) = \begin{cases} 3^{r-2} \frac{3Q+1}{2^r}, & Q \equiv 1 \pmod{4}, \quad r = \nu_2(3Q+1) \geq 2, \\ 3^{r-2} \frac{Q+1}{2^r}, & Q \equiv 3 \pmod{4}, \quad r = \nu_2(Q+1) \geq 2. \end{cases}$$

Denotaremos las dos familias de ramas por

$$A_r(Q) = \frac{3^{r-1}Q + 3^{r-2}}{2^r}, \quad B_r(Q) = \frac{3^{r-2}Q + 3^{r-2}}{2^r}, \quad r \geq 2.$$

La clasificación elemental de crecimiento, establecida en [1], es

$$A_r(Q) > Q \iff r \geq 3, \quad B_r(Q) > Q \iff r \geq 6,$$

para $Q > 1$ perteneciente al correspondiente cilindro. Por tanto las únicas ramas contractivas son

$$\boxed{A_2, \quad B_2, \quad B_3, \quad B_4, \quad B_5.}$$

Un ciclo con una única expansión puede rotarse de modo que su mínimo sea el punto donde se aplica esa expansión. Tendrá entonces la forma

$$q = Q_0 < Q_1 > Q_2 > \cdots > Q_n > Q_{n+1} = q, \quad (1)$$

donde el primer paso es A_e , con $e \geq 3$, o B_e , con $e \geq 6$, y los n pasos restantes pertenecen al alfabeto contractivo anterior.

Observación 2.1 («Una expansión» no significa «un mínimo local»). Conviene prevenir una lectura errónea. En la literatura clásica sobre ciclos del problema $3n+1$, un m -ciclo es aquel cuya órbita presenta m mínimos locales, de modo que $m=1$ describe un ciclo con un único bloque ascendente. Aquí, en cambio, «una única expansión» es una afirmación sobre el alfabeto de R , no sobre la forma de la órbita subyacente.

En efecto, cada paso de R de índice r comprime un paso contractivo de la función inducida F de [1] seguido de $r-2$ pasos crecientes. Por tanto un símbolo aporta un mínimo local a la órbita de F exactamente cuando $r \geq 3$. Entre las cinco ramas contractivas, A_2 y B_2 no aportan ninguno, mientras que B_3 , B_4 y B_5 aportan uno cada una. El número de mínimos locales de la órbita de F asociada a un ciclo con una única expansión es, en consecuencia,

$$1 + n_3 + n_4 + n_5,$$

con la notación de multiplicidades de la Sección 12, y puede ser arbitrariamente grande. El Teorema 1.1 no es, pues, el análogo literal del caso $m = 1$ clásico, aunque ocupe la misma posición en la jerarquía de dificultad.

3. Composición afín de una palabra

Sea

$$W = C_0 C_1 \cdots C_{k-1}, \quad C_i \in \{A_{r_i}, B_{r_i}\},$$

y para cada símbolo

$$m_i = \begin{cases} r_i - 1, & C_i = A_{r_i}, \\ r_i - 2, & C_i = B_{r_i}, \end{cases} \quad S = \sum_{i=0}^{k-1} r_i, \quad M = \sum_{i=0}^{k-1} m_i.$$

Proposición 3.1 (Composición afín). *Toda palabra W actúa en la forma*

$$W(Q) = \frac{3^M Q + C_W}{2^S},$$

donde C_W es un entero positivo.

Demostración. Cada rama tiene la forma $C_i(Q) = (3^{m_i} Q + 3^{r_i-2})/2^{r_i}$, con numerador y denominador positivos. La afirmación se obtiene por composición sucesiva. $\square$

Lema 3.2 (Recurrencia del término aditivo). *Si un prefijo actúa como $W(Q) = (3^M Q + C)/2^S$ y se añade una rama X_r , con $m_r = r - 1$ si $X = A$ y $m_r = r - 2$ si $X = B$, los nuevos parámetros son*

$$S' = S + r, \quad M' = M + m_r, \quad \boxed{C' = 3^{m_r} C + 3^{r-2} 2^S}.$$

Si a es el número de símbolos A y b el de símbolos B , entonces $a + b = k$ y

$$M = \sum_A (r_i - 1) + \sum_B (r_i - 2) = S - a - 2b = S - k - b.$$

Definimos

$$\boxed{d := k + b}, \quad \text{de modo que} \quad \boxed{M = S - d}. \quad (2)$$

4. Ecuación exacta de un ciclo

Si la palabra W representa un ciclo y $W(Q) = Q$, la Proposición 3.1 da $2^S Q = 3^M Q + C_W$, es decir

$$\boxed{(2^S - 3^M)Q = C_W}. \quad (3)$$

Como $Q > 0$ y $C_W > 0$, necesariamente $2^S > 3^M$, esto es $S \log 2 - M \log 3 > 0$. Utilizando $M = S - d$ obtenemos la forma lineal

$$\boxed{\Lambda := d \log 3 - S \log \frac{3}{2} = S \log 2 - M \log 3 > 0}. \quad (4)$$

Lema 4.1 (Positividad de los coeficientes). *En un ciclo con una única expansión se tiene $S > d$ y, por tanto, $M \geq 1$.*

Demostración. Cada símbolo cumple $r_i \geq 2$, y el símbolo expansivo cumple $r = e \geq 3$; luego $S \geq e + 2(k-1) \geq 2k+1$. Por otra parte $b \leq k$ da $d = k+b \leq 2k$. Así $S \geq 2k+1 > 2k \geq d$. $\square$

Este lema es necesario para aplicar más abajo el resultado de Laurent, Mignotte y Nesterenko, cuyo enunciado exige coeficientes enteros positivos.

5. Identidad multiplicativa y cota por el mínimo

Para una rama A_r se tiene $Q_{i+1}/Q_i = (3^{r-1}/2^r)(1 + 1/(3Q_i))$, y para una rama B_r , $Q_{i+1}/Q_i = (3^{r-2}/2^r)(1 + 1/Q_i)$. Multiplicando alrededor del ciclo y tomando logaritmos:

Proposición 5.1 (Forma lineal exacta). *Todo ciclo satisface*

$$\Lambda = \sum_A \log\left(1 + \frac{1}{3Q_i}\right) + \sum_B \log\left(1 + \frac{1}{Q_i}\right). \quad (5)$$

En particular, si $q = \min_i Q_i$, entonces

$$0 < \Lambda < \frac{k+2b}{3q} \leq \frac{d}{2q}. \quad (6)$$

Demostración. La identidad (5) es la identidad multiplicativa anterior escrita en logaritmos. Para la desigualdad se usa $\log(1+x) < x$ y $Q_i \geq q$, lo que da $\Lambda < (a+3b)/(3q) = (k+2b)/(3q)$. Finalmente $b \leq k$ implica $b \leq d/2$, luego $k+2b = d+b \leq \frac{3}{2}d$ y $\Lambda < d/(2q)$. $\square$

6. Contracción uniforme de las cinco ramas

Lema 6.1 (Contracción uniforme). *Para todo entero $Q > 1$ situado en una rama contractiva,*

$$\frac{1}{4} < \frac{R(Q)}{Q} \leq \frac{27}{31} < 1.$$

Más precisamente,

rama	A_2	B_2	B_3	B_4	B_5	rama	A_2	B_2	B_3	B_4	B_5
$\frac{R(Q)}{Q}$	$\leq \frac{7}{9}$	$\leq \frac{1}{3}$	$\leq \frac{3}{7}$	$\leq \frac{3}{5}$	$\leq \frac{27}{31}$	$\frac{R(Q)}{Q}$	$> \frac{3}{4}$	$> \frac{1}{4}$	$> \frac{3}{8}$	$> \frac{9}{16}$	$> \frac{27}{32}$

Demostración. Las cinco expresiones son

$$\frac{3Q+1}{4Q}, \quad \frac{Q+1}{4Q}, \quad \frac{3(Q+1)}{8Q}, \quad \frac{9(Q+1)}{16Q}, \quad \frac{27(Q+1)}{32Q},$$

cada una decreciente en Q y con límite, cuando $Q \rightarrow \infty$, igual a $3/4$, $1/4$, $3/8$, $9/16$ y $27/32$ respectivamente; de ahí las cotas inferiores. Dentro de los cilindros correspondientes, los menores enteros admisibles mayores que 1 son 9, 3, 7, 15 y 31, lo que da las cotas superiores. $\square$

7. Cotas para la profundidad de la expansión

Sea un ciclo con una única expansión, de profundidad e , escrito como en (1). Para ambas familias expansivas se tiene la cota $Q_1/q < (3/2)^e$.

Lema 7.1 (Cota superior para n).

$$n < \frac{\log(3/2)}{\log(31/27)} e \quad y, \text{ en consecuencia,} \quad e > \gamma(d-2), \quad \gamma := \frac{\log(31/27)}{2\log(3/2)} = 0,170360 \dots$$

Demostración. Por el Lema 6.1,

$$1 = \frac{Q_1}{q} \prod_{i=1}^n \frac{Q_{i+1}}{Q_i} < \left(\frac{3}{2}\right)^e \left(\frac{27}{31}\right)^n,$$

de donde $n \log(31/27) < e \log(3/2)$. Como $k = n + 1$ y $d = k + b \leq 2k$, se sigue $d < 2 \log(3/2) e / \log(31/27) + 2 = e/\gamma + 2$. $\square$

Lema 7.2 (Cota inferior para n).

$$n > \frac{\log(3/2)}{\log 4} e - \frac{\log 9}{\log 4} > 0,29248 e - 1,58497.$$

Demostración. Por el Lema 6.1 cada rama contractiva cumple $R(Q)/Q > 1/4$, luego

$$\frac{q}{Q_1} = \prod_{i=1}^n \frac{Q_{i+1}}{Q_i} > 4^{-n}.$$

Por otra parte, si la expansión es A_e entonces $Q_1 = 3^{e-2}(3q+1)/2^e > 3^{e-1}q/2^e$, y si es B_e entonces $Q_1 = 3^{e-2}(q+1)/2^e > 3^{e-2}q/2^e$; en el peor de los dos casos $q/Q_1 < 9(2/3)^e$. Combinando, $4^{-n} < 9(2/3)^e$, y tomando logaritmos se obtiene el enunciado. $\square$

Corolario 7.3 (S es lineal en d). *En un ciclo con una única expansión,*

$$e < 3,41902 n + 5,41902 \quad y \text{ por tanto} \quad \boxed{S < 9d}.$$

Demostración. La primera desigualdad es el Lema 7.2 despejado. Para la segunda, $S = e + S_c$, donde S_c es la suma de los exponentes del bloque contractivo; como el mayor exponente contractivo es 5, se tiene $S_c \leq 5n$ y por tanto $S < 8,41902 n + 5,41902$. Finalmente $d = k + b \geq k = n + 1$ da $n \leq d - 1$, de donde $S < 8,41902 d - 3 < 9d$. $\square$

8. Cota exponencial para la forma lineal

Lema 8.1 (Crecimiento exponencial del mínimo). $q \geq (2^e - 1)/3$.

Demostración. Si la expansión es A_e entonces $3q + 1 = 2^e u$ con u impar positivo, de donde $q \geq (2^e - 1)/3$. Si es B_e entonces $q + 1 = 2^e u$ y $q \geq 2^e - 1$. $\square$

Teorema 8.2 (Cota exponencial). *Si existe un ciclo no trivial con exactamente una rama expansiva, entonces*

$$\boxed{0 < \Lambda = d \log 3 - S \log \frac{3}{2} < \frac{3d}{2(2^{\gamma(d-2)} - 1)}}. \quad (7)$$

Demostración. Combinando el Lema 7.1 con el Lema 8.1 se obtiene $q > (2^{\gamma(d-2)} - 1)/3$, y se sustituye en (6). $\square$

9. Cota superior: $d \leq 65$

Recordemos el resultado de Laurent, Mignotte y Nesterenko [8, Corollaire 2]. Sean α_1, α_2 números algebraicos reales positivos, multiplicativamente independientes, con $|\alpha_i| \geq 1$, y sean b_1, b_2 enteros positivos. Pongamos $\Lambda = b_2 \log \alpha_2 - b_1 \log \alpha_1$,

$$D = [\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2) : \mathbb{Q}] / [\mathbb{R}(\alpha_1, \alpha_2) : \mathbb{R}], \quad b' = \frac{b_1}{D \log A_2} + \frac{b_2}{D \log A_1},$$

donde $A_1, A_2 > 1$ satisfacen $\log A_i \geq \max\{h(\alpha_i), |\log \alpha_i|/D, 1/D\}$. Entonces

$$\log |\Lambda| \geq -24,34 D^4 \left(\max\left\{ \log b' + 0,14, \frac{21}{D}, \frac{1}{2} \right\} \right)^2 \log A_1 \log A_2. \quad (8)$$

Los datos de la aplicación son los siguientes. Tomamos $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 2$, $b_1 = M$, $b_2 = S$, de modo que $\Lambda = S \log 2 - M \log 3$ coincide con (4). Los dos números son reales, positivos, ≥ 1 y multiplicativamente independientes, y b_1, b_2 son enteros positivos por el Lema 4.1. Como ambos son racionales, $D = 1$. Las alturas son $h(2) = \log 2$ y $h(3) = \log 3$, luego puede tomarse

$$\log A_1 = \max\{\log 3, \log 3, 1\} = \log 3, \quad \log A_2 = \max\{\log 2, \log 2, 1\} = 1,$$

y entonces $b' = M + S/\log 3$. Por el Corolario 7.3, $M < S < 9d$, de donde

$$b' < 9d \left(1 + \frac{1}{\log 3} \right) < 17,19 d. \quad (9)$$

Lema 9.1 (Exclusión del rango grande). *No existe ningún ciclo con una única expansión y $d > 6,6 \times 10^7$.*

Demostración. En ese rango $\log b' + 0,14 > 21$, de modo que (8) y (9) dan

$$\log \Lambda \geq -24,34 (\log(17,19 d) + 0,14)^2 \log 3,$$

cantidad que crece solo como el cuadrado de un logaritmo. El Teorema 8.2, en cambio, da $\log \Lambda < \log(3d/2) - \gamma(d-2) \log 2$, lineal y negativa en d . Para $d = 6,6 \times 10^7$ la primera vale $-1,18 \times 10^4$ y la segunda $-7,9 \times 10^6$; la diferencia solo aumenta con d , de modo que las dos desigualdades son incompatibles en todo el rango. $\square$

Lema 9.2 (Cota inferior para Λ). *En un ciclo con una única expansión con $d \leq 6,6 \times 10^7$,*

$$\Lambda > e^{-11792,44}.$$

Demostración. En ese rango, (9) da $\log b' + 0,14 < 21$, luego el máximo de (8) vale 21 y

$$\log |\Lambda| \geq -24,34 \cdot 21^2 \cdot \log 3 = -11792,4384 \dots$$

$\square$

Teorema 9.3 (Cota superior). *Si existe un ciclo no trivial con exactamente una rama expansiva, entonces $d \leq 65$.*

Demostración. Por el Lema 9.1 podemos suponer $d \leq 6,6 \times 10^7$. Entonces el Teorema 8.2 y el Lema 9.2 dan

$$e^{-11792,44} < \Lambda < \frac{3d}{2(2^{\gamma(d-2)} - 1)}.$$

El miembro derecho es decreciente en d a partir de valores pequeños y cae por debajo de $e^{-11792,44}$ en $d = 99\,968$; por tanto $d \leq 99\,967$.

Para el rango restante se recurre a que S es entero. Para cada $3 \leq d \leq 99\,967$ se examinan todos los enteros S con $0 < \Lambda < 3d/(2(2^{\gamma(d-2)} - 1))$; como disminuir S en una unidad aumenta Λ en $\log(3/2)$, esos S forman un intervalo finito que se recorre por completo. Resultan exactamente 388 pares (d, S) admisibles, y el mayor valor de d entre ellos es 65. El detalle del cómputo está en la Sección 14. $\square$

10. Cota inferior: $d \geq 179$

Sea

$$\alpha := \frac{\log 3}{\log(3/2)} = 2,709511291\dots, \quad \text{de modo que} \quad \Lambda = d \log \frac{3}{2} \left(\alpha - \frac{S}{d} \right).$$

El desarrollo en fracción continua de α tiene cocientes parciales $[2; 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23, \dots]$ y convergentes

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{8}{3}, \frac{19}{7}, \frac{65}{24}, \frac{84}{31}, \frac{485}{179}, \frac{1054}{389}, \frac{24727}{9126}, \dots$$

Lema 10.1 (Verificación computacional). *Ningún entero impar $Q \leq X_0 := 10^5$ es el mínimo de un ciclo de R .*

Demostración. Para cada impar Q en ese rango se itera R hasta obtener un valor estrictamente menor que Q o el valor 1; en todos los casos ocurre lo primero, con un máximo de 37 iteraciones. Si Q fuese el mínimo de un ciclo, su órbita no podría descender por debajo de Q . Véase la Sección 14. $\square$

Teorema 10.2 (Cota inferior). *Si existe un ciclo no trivial con exactamente una rama expansiva, entonces $d \geq 179$.*

Demostración. Sean p_n/q_n los convergentes de α . Por la propiedad de mejor aproximación, si $d < q_{n+1}$ entonces $|d\alpha - S| \geq |q_n\alpha - p_n| > 1/(q_n + q_{n+1})$, y por tanto

$$\Lambda = d \log \frac{3}{2} |d\alpha - S| > \frac{\log(3/2)}{q_n + q_{n+1}}.$$

Por otro lado, el Lema 10.1 da $q > X_0$ y la Proposición 5.1 da $\Lambda < d/(2q) < d/(2X_0)$. Si además $d < q_{n+1}$, entonces $\Lambda < q_{n+1}/(2X_0)$. Así, la desigualdad

$$\frac{\log(3/2)}{q_n + q_{n+1}} > \frac{q_{n+1}}{2X_0} \tag{10}$$

es incompatible con $d < q_{n+1}$, y obliga a $d \geq q_{n+1}$.

Basta tomar $n = 5$, con $q_5 = 31$ y $q_6 = 179$:

$$\frac{\log(3/2)}{31 + 179} = 1,9308 \times 10^{-3} > \frac{179}{2X_0} = 8,95 \times 10^{-4},$$

de modo que $d < 179$ es imposible. Por consiguiente $d \geq 179$. $\square$

Observación 10.3 (Versión más fuerte). El mismo argumento con un X_0 mayor da cotas inferiores mayores. Se ha verificado que ningún impar $Q \leq 387\,396\,683$ es el mínimo de un ciclo, con un máximo de 108 iteraciones hasta descender; tomando $n = 7$, con $q_7 = 389$ y $q_8 = 9126$, se obtiene entonces $d \geq 9126$. Esa comprobación es mucho más costosa y el Teorema 1.1 no la necesita: para contradecir $d \leq 65$ basta el Teorema 10.2.

11. Demostración del resultado principal

Demostración del Teorema 1.1. Supongamos que existe un ciclo periódico positivo no trivial de R con exactamente una rama expansiva. El Teorema 9.3 da $d \leq 65$ y el Teorema 10.2 da $d \geq 179$, lo cual es imposible. $\square$

12. Estructura combinatoria del bloque contractivo

Los resultados de esta sección no intervienen en la demostración del Teorema 1.1. Se incluyen por dos motivos: permiten la verificación independiente de la Sección 13, y son el instrumento natural para abordar ciclos con más de una expansión.

Recorriendo hacia atrás el bloque contractivo, las cinco ramas inversas son

$$A_2^{-1}(y) = \frac{4y-1}{3}, \quad B_2^{-1}(y) = 4y-1, \quad B_3^{-1}(y) = \frac{8y}{3}-1, \quad B_4^{-1}(y) = \frac{16y}{9}-1, \quad B_5^{-1}(y) = \frac{32y}{27}-1,$$

que se escriben uniformemente como $\phi_C(y) = (a_C y - b_C)/3^{h_C}$ con

C	A_2	B_2	B_3	B_4	B_5
(a_C, b_C, h_C)	$(4, 1, 1)$	$(4, 1, 0)$	$(8, 3, 1)$	$(16, 9, 2)$	$(32, 27, 3)$

Conviene fijar la orientación. Sea $C_1 C_2 \cdots C_n$ el bloque contractivo en orden directo, es decir $Q_1 \xrightarrow{C_1} Q_2 \xrightarrow{C_2} \cdots \xrightarrow{C_n} q$. Entonces $Q_1 = \phi_{C_1} \circ \cdots \circ \phi_{C_n}(q)$, de modo que, partiendo de q , las inversas se aplican en el orden $\phi_{C_n}, \dots, \phi_{C_1}$. Escribiremos

$$W = D_1 D_2 \cdots D_n, \quad D_j := C_{n+1-j}, \quad \Phi_W := \phi_{D_n} \circ \cdots \circ \phi_{D_1},$$

de manera que $Q_1 = \Phi_W(q)$. Todos los enunciados siguientes se refieren a esta palabra invertida.

Proposición 12.1 (Forma inversa de un bloque). $\Phi_W(y) = (A_W y - B_W)/3^{H_W}$, con $H_W = \sum_j h_{D_j}$ y $3 \nmid A_W$. Si el prefijo $D_1 \cdots D_{j-1}$ tiene parámetros (A, B, H) y se añade $D_j = (a, b, h)$, entonces

$$A' = aA, \quad B' = aB + b3^H, \quad H' = H + h. \quad (11)$$

Denotando por n_A, n_2, n_3, n_4, n_5 las multiplicidades de A_2, B_2, B_3, B_4, B_5 , se tiene

$$A_W = 2^{S_c}, \quad S_c = 2n_A + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + 5n_5, \quad H_W = n_A + n_3 + 2n_4 + 3n_5,$$

de modo que A_W y H_W no dependen del orden: toda la dependencia combinatoria queda concentrada en B_W .

Teorema 12.2 (Lema de reordenamiento). Sean $X = (a_X, b_X, h_X)$ e $Y = (a_Y, b_Y, h_Y)$ dos símbolos consecutivos. Aplicando (11) en los dos órdenes, $B_{XY} - B_{YX} = 3^H \Delta(X, Y)$ con

$$\Delta(X, Y) = a_Y b_X + b_Y 3^{h_X} - a_X b_Y - b_X 3^{h_Y},$$

cuyo signo no depende del prefijo ni de la posición del par. Para las cinco ramas contractivas,

$\Delta(X, Y)$	A_2	B_2	B_3	B_4	B_5
A_2	0	2	2	-2	-22
B_2	-2	0	-4	-20	-76
B_3	-2	4	0	-24	-120
B_4	2	20	24	0	-144
B_5	22	76	120	144	0

Esta tabla define un orden total. Fijadas las multiplicidades, B_W alcanza su máximo cuando la palabra invertida presenta el orden

$$B_5 \succ B_4 \succ A_2 \succ B_3 \succ B_2,$$

y su mínimo en el orden contrario. En el recorrido directo del bloque ambos órdenes aparecen invertidos.

Demostración. La relación $X \succ Y$ definida por $\Delta(X, Y) > 0$ es, según la tabla, un orden total. Si dos símbolos adyacentes aparecen en orden contrario, intercambiarlos aumenta B_W ; el factor 3^H es positivo y los símbolos posteriores actúan sobre B de forma afín con coeficiente positivo, de modo que el signo se conserva. Repitiendo intercambios adyacentes se alcanzan los dos extremos. $\square$

Los extremos se calculan sin enumerar permutaciones: si una misma rama $C = (a, b, h)$ se repite m veces y antes del bloque el estado es (B, H) , entonces, como $a \neq 3^h$ en las cinco ramas,

$$B_m = a^m B + b 3^H \frac{a^m - 3^{hm}}{a - 3^h}. \quad (12)$$

Finalmente, igualando $\Phi_W(q)$ con la expresión directa de la rama expansiva se obtienen las ecuaciones de cierre

$$q = \frac{2^e B_W + 3^{H_W+e-2}}{2^e A_W - 3^{H_W+e-1}} \quad (\text{expansión } A_e), \quad q = \frac{2^e B_W + 3^{H_W+e-2}}{2^e A_W - 3^{H_W+e-2}} \quad (\text{expansión } B_e). \quad (13)$$

13. Verificación independiente por enumeración

El Teorema 1.1 admite una segunda demostración que no utiliza la Sección 10 y que sirve de verificación cruzada.

Partiendo del Teorema 9.3, los 388 pares (d, S) admisibles tienen todos $d \leq 65$. Para cada uno, las relaciones $k = n + 1$, $b = d - k$, S_c determinado por las multiplicidades y $e = S - S_c$, junto con $e \geq 3$ o $e \geq 6$ según el tipo de expansión, dejan exactamente 1 175 776 configuraciones $(n_A, n_2, n_3, n_4, n_5; e; \text{tipo})$.

Para cada configuración, el Teorema 12.2 y la fórmula (12) dan $B_{\min}$ y $B_{\max}$; como q es función estrictamente creciente de B_W en (13) cuando el denominador es positivo, se obtiene

un intervalo explícito $[q_{\min}, q_{\max}]$. Simultáneamente la rama expansiva prescribe una clase residual: $3q + 1 \equiv 2^e \pmod{2^{e+1}}$ si es A_e , y $q \equiv 2^e - 1 \pmod{2^{e+1}}$ si es B_e . Una configuración solo puede cerrarse si el intervalo contiene un entero de esa clase.

Sobreviven 52 configuraciones, que producen únicamente dos valores candidatos para el mínimo: $q = 5$ y $q = 341$. Iterando R desde ambos,

$$5 \rightarrow 9 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 1,$$

$$341 \rightarrow 6561 \rightarrow 4921 \rightarrow 3691 \rightarrow 923 \rightarrow 231 \rightarrow 87 \rightarrow 33 \rightarrow 25 \rightarrow 19 \rightarrow 5 \rightarrow 9 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 1,$$

de modo que ninguno de los dos es el mínimo de un ciclo. Se concluye de nuevo que no existen ciclos con una única expansión.

14. La parte computacional

La demostración contiene tres cálculos finitos, todos exactos o con márgenes holgados.

1. La criba sobre (d, S) . Para $3 \leq d \leq 99\,967$ se recorren todos los enteros S con $0 < \Lambda < 3d/(2(2^{\gamma(d-2)} - 1))$. El resultado es 388 pares, con $d \leq 65$. El cálculo usa aritmética de precisión arbitraria; repetido con 60 y con 250 dígitos decimales produce resultados idénticos.

2. La verificación del mínimo. Para cada uno de los 49 999 enteros impares Q con $3 \leq Q \leq 10^5$ se itera R hasta obtener un valor estrictamente menor que Q ; el máximo de iteraciones necesarias es 37 y el cómputo tarda unas centésimas de segundo. El Teorema 10.2 requiere

$$X_0 > \frac{q_6(q_5 + q_6)}{2 \log(3/2)} = \frac{179 \cdot 210}{2 \log(3/2)} = 46\,354,2 \dots,$$

de modo que el valor empleado deja un margen de un factor superior a 2.

La Observación 10.3 se apoya en una comprobación mucho mayor: los 193 698 341 impares con $3 \leq Q \leq 387\,396\,683$, con un máximo de 108 iteraciones. Esa comprobación no interviene en la demostración del Teorema 1.1.

3. La enumeración de la Sección 13. 1 175 776 configuraciones, con aritmética entera y racional exacta. No interviene en la demostración del Teorema 1.1.

Los cálculos 1 y 2, que son los únicos que intervienen en la demostración del Teorema 1.1, se reproducen en segundos en un ordenador personal; el 3, en pocos minutos. El código completo, escrito en Python 3 y con la sola dependencia de `mpmath`, está disponible en

https://www.collatz.es/articulos/seccion7_2/verificacion_U1.py

Ejecutado sin argumentos reproduce, en el orden en que se demuestran, la criba, la verificación del mínimo, la cota inferior y la verificación cruzada. Su huella SHA-256 es

3a14adeac78a09b7e00a52038d2049d1
cdcdb97249fab3d9f8cbf2b0f092809f

Conviene subrayar que el Teorema 1.1 admite las dos demostraciones de las Secciones 11 y 13, y que ninguna de las dos depende de la comprobación de gran tamaño mencionada en la Observación 10.3.

15. Relación con el estudio clásico de ciclos tipo Collatz

La aparición de una forma lineal en $\log 2$ y $\log 3$ no es accidental, y conviene precisar hasta qué punto la estrategia es la clásica y en qué se aparta de ella. Para el estado general de la cuestión remitimos a la panorámica de Lagarias [2].

Steiner demostró en 1977 la inexistencia de 1-ciclos del problema $3n + 1$ [3], esto es, de ciclos formados por un único bloque ascendente seguido de un único bloque descendente. Su demostración combina una cota superior arquimediana para la forma lineal asociada al ciclo con una cota inferior procedente de la teoría de formas lineales en logaritmos. Simons extendió después el argumento a los 2-ciclos [4], y Simons y de Weger lo llevaron hasta los m -ciclos con $1 \leq m \leq 68$ [5], apoyándose en la cota de Laurent, Mignotte y Nesterenko [8] y en el cálculo de convergentes de $\log_2 3$. La cota ha seguido mejorando: Hercher ha demostrado que no existen m -ciclos de Collatz con $m \leq 91$ [7].

El Teorema 1.1 ocupa, para el mapa R , la posición del teorema de Steiner, y la estrategia seguida aquí es la suya: el Teorema 8.2 desempeña el papel de la cota superior arquimediana, el Corolario 7.3 el de la acotación de la altura, el Lema 9.2 el de la cota de trascendencia, y el Teorema 10.2 el del argumento de Crandall por convergentes. Ninguno de esos ingredientes es original de este trabajo.

Lo que sí es específico de R es la estructura de sus ramas. El mapa clásico posee una sola familia; R posee dos, A_r y B_r , y su clasificación exacta produce una lista *finita* de cinco ramas contractivas. De esa lista finita, y no del mecanismo diofántico, proceden los resultados de la Sección 12: la representación inversa de la Proposición 12.1, que concentra toda la dependencia combinatoria en el entero B_W ; el lema de reordenamiento del Teorema 12.2, que sustituye la enumeración de las permutaciones de un multiconjunto por dos órdenes canónicos; y las ecuaciones de cierre (13). Estos resultados responden específicamente a la estructura de dos familias de ramas de R y no forman parte del mecanismo diofántico clásico empleado por Steiner, Simons y Simons–de Weger.

Cabe añadir que Simons ha estudiado hasta qué punto el método de los m -ciclos se traslada a sucesiones de Syracuse generalizadas [6]. El marco allí considerado exige que la rama se seleccione por la clase de x_n módulo un entero fijo; en R la selecciona una valuación 2-ádica no acotada, de modo que el Teorema 1.1 no es caso particular de aquellos resultados.

16. Conclusiones

1. Toda palabra de ramas posee una composición afín exacta $R^k(Q) = (3^M Q + C_W)/2^S$, y para una palabra con k símbolos y b ramas de tipo B se tiene $M = S - k - b$.
2. Todo ciclo determina la forma lineal positiva $\Lambda = d \log 3 - S \log(3/2)$ con $d = k + b$.
3. En un ciclo con una única expansión, la profundidad e está acotada por arriba y por abajo de forma lineal en el número de contracciones, de donde $S < 9d$; el mínimo del ciclo crece al menos exponencialmente con e , y por tanto Λ es exponencialmente pequeña en d .
4. Confrontando esa cota exponencial con el resultado de Laurent, Mignotte y Nesterenko se obtiene $d \leq 65$.
5. La verificación de que ningún impar menor que 10^5 es el mínimo de un ciclo, combinada

con los convergentes de $\log 3 / \log(3/2)$, da $d \geq 179$; con una verificación mayor la misma construcción da $d \geq 9126$.

6. En consecuencia no existen ciclos con una única expansión (Teorema 1.1).
7. Todo bloque contractivo posee una representación inversa $\Phi_W(y) = (A_W y - B_W)/3^{H_W}$ en la que A_W y H_W no dependen del orden, y B_W satisface un principio exacto de reordenamiento, $B_5 \succ B_4 \succ A_2 \succ B_3 \succ B_2$, referido al recorrido del bloque hacia atrás desde el mínimo.
8. Ese principio permite una verificación independiente del Teorema 1.1 por enumeración exhaustiva de 1 175 776 configuraciones, que deja dos candidatos, ambos descartados directamente.

El caso de dos o más expansiones queda abierto. Los resultados de la Sección 12 son aplicables a él sin modificación; lo que exige reelaboración es el reparto del bloque contractivo entre las expansiones sucesivas.

Referencias

- [1] M. Cerdá Bennassar, *Un sistema dinámico sobre enteros y mitades de impares*, 2026. Disponible en collatz.es.
- [2] J. C. Lagarias, *The $3x+1$ problem and its generalizations*, American Mathematical Monthly **92** (1985), 3–23.
- [3] R. P. Steiner, *A theorem on the Syracuse problem*, Proceedings of the Seventh Manitoba Conference on Numerical Mathematics and Computing, 1977, 553–559.
- [4] J. L. Simons, *On the nonexistence of 2-cycles for the $3x+1$ problem*, Mathematics of Computation **74** (2005), 1565–1572.
- [5] J. L. Simons and B. M. M. de Weger, *Theoretical and computational bounds for m -cycles of the $3n+1$ problem*, Acta Arithmetica **117** (2005), 51–70.
- [6] J. L. Simons, *On the (non-)existence of m -cycles for generalized Syracuse sequences*, Acta Arithmetica **131** (2008), n.º 3, 217–254.
- [7] C. Hercher, *There are no Collatz m -cycles with $m \leq 91$* , Journal of Integer Sequences (2023); arXiv:2201.00406.
- [8] M. Laurent, M. Mignotte and Y. Nesterenko, *Formes linéaires en deux logarithmes et déterminants d’interpolation*, Journal of Number Theory **55** (1995), 285–321.