

Ciclos con un número fijo de expansiones en un mapa de retorno sobre los impares

Miguel Cerdá Bennassar

Octubre de 2026

Resumen

En [2] se demostró que el mapa de retorno R sobre los enteros impares positivos no admite ciclos periódicos no triviales con una única rama expansiva. Aquí se extiende el mecanismo a un número cualquiera pero fijo de expansiones.

El resultado central es un lema de optimización: si $e_1, \dots, e_m$ son las profundidades de las expansiones de un ciclo y $A_j = e_1 + \dots + e_j$, entonces

$$\max_{1 \leq j \leq m} \{e_j - c A_{j-1}\} \geq \eta_m E, \quad c = \log_2 \frac{3}{2}, \quad \eta_m = \frac{c}{(1+c)^m - 1}, \quad E = A_m,$$

y la constante η_m es óptima. De él se deduce que el mínimo del ciclo crece exponencialmente en d para cada m fijo, y con ello una cota superior para d que se criba hasta valores pequeños. Confrontada con una cota inferior que no depende de m y se obtiene por comprobación directa, resulta:

No existe ningún ciclo periódico positivo no trivial de R que contenga nueve ramas expansivas o menos.

Se indica además el coste de los escalones siguientes y el límite del método, que proviene de que $\eta_m \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$.

Índice

1. Introducción	2
2. Notación y planteamiento	2
3. Cotas para la profundidad expansiva total	3
4. El lema de optimización	4
5. Cota exponencial para el mínimo	5
6. Cota superior para d	5
7. Cota inferior para d	6

8. Demostración del resultado principal	7
9. Alcance y límite del método	8
10. La parte computacional	8
11. Conclusiones	9

1. Introducción

En [1] se introdujo un sistema dinámico sobre los enteros no negativos y las mitades de impares y se redujo su dinámica a un mapa de retorno R sobre los impares. En [2] se demostró que R no admite ciclos periódicos no triviales con una única rama expansiva, mediante la confrontación de dos cotas para un parámetro entero d asociado al ciclo: una superior, $d \leq 65$, procedente de una cota exponencial para la forma lineal $\Lambda = d \log 3 - S \log(3/2)$ combinada con el resultado de Laurent, Mignotte y Nesterenko [9]; y una inferior, obtenida de los convergentes de $\log 3 / \log(3/2)$ y de la verificación de que ningún impar pequeño es el mínimo de un ciclo.

El presente escrito extiende ese mecanismo a un número fijo m de expansiones y demuestra:

Teorema 1.1 (Resultado principal). *No existe ningún ciclo periódico positivo no trivial de R que contenga nueve ramas expansivas o menos.*

La estructura de la demostración reproduce la de [2]. Lo que hay que construir de nuevo es la cota del mínimo: con una sola expansión el mínimo del ciclo está inmediatamente por debajo de ella y crece como 2^e ; con varias, la expansión más profunda puede estar precedida por otras, y su efecto sobre el mínimo queda amortiguado por las contracciones intermedias. El Lema 4.1 cuantifica exactamente esa amortiguación.

Conviene precisar la relación con la literatura clásica. En el estudio de ciclos del problema $3n + 1$, Steiner [3] excluyó los 1-ciclos, Simons [4] los 2-ciclos y Simons y de Weger [5] los m -ciclos con $m \leq 68$; Hercher ha llegado después hasta $m \leq 91$ [6]. Allí un m -ciclo es aquel cuya órbita presenta m mínimos locales. Aquí m cuenta ramas expansivas de R , que es otra cosa: como se señala en [2, Obs. 2.1], un ciclo con m expansiones de R puede presentar muchos más mínimos locales en la órbita subyacente. La analogía es, por tanto, *de estrategia* y no de objeto: se comparten la cota superior arquimediana, el control lineal de la altura, la cota de trascendencia, la reducción por convergentes y la criba finita, pero los ciclos que se excluyen no se corresponden entre sí.

2. Notación y planteamiento

Recordamos de [1, 2] que R posee dos familias de ramas,

$$A_r(Q) = \frac{3^{r-1}Q + 3^{r-2}}{2^r}, \quad B_r(Q) = \frac{3^{r-2}Q + 3^{r-2}}{2^r}, \quad r \geq 2,$$

que A_r es expansiva si y solo si $r \geq 3$ y B_r si y solo si $r \geq 6$, y que las ramas contractivas son exactamente A_2, B_2, B_3, B_4, B_5 .

Sea un ciclo con exactamente $m \geq 1$ ramas expansivas y sea q su mínimo global.

Lema 2.1 (Rotación). *El paso que parte de q es expansivo. En consecuencia el ciclo puede escribirse*

$$q = q_1 \xrightarrow{E_1} P_1 \xrightarrow{W_1} q_2 \xrightarrow{E_2} P_2 \xrightarrow{W_2} \dots \xrightarrow{E_m} P_m \xrightarrow{W_m} q_1,$$

donde E_j es una rama expansiva de profundidad e_j y W_j un bloque de n_j ramas contractivas.

Demostración. Si el paso que parte de q fuese contractivo se tendría $R(q) < q$, contra la minimalidad de q . $\square$

Ponemos

$$E = \sum_{j=1}^m e_j, \quad N = \sum_{j=1}^m n_j, \quad k = N + m, \quad d = k + b,$$

donde b es el número de ramas de tipo B del ciclo. Siguen siendo válidas, con las mismas demostraciones de [2], las identidades

$$M = S - d, \quad \Lambda := d \log 3 - S \log \frac{3}{2} = S \log 2 - M \log 3 > 0,$$

donde S es la suma de los exponentes r de todas las ramas, así como la estimación

$$0 < \Lambda < \frac{d}{2q}. \quad (1)$$

Lema 2.2 (Positividad de los coeficientes). $S - d \geq m \geq 1$.

Demostración. Cada rama contractiva tiene $r \geq 2$ y cada expansiva $r \geq 3$, luego $S \geq 3m + 2N$. Por otra parte $b \leq k$ da $d \leq 2k = 2(N + m)$. Restando, $S - d \geq 3m + 2N - 2N - 2m = m$. $\square$

Este lema permite aplicar [9, Corollaire 2], cuyo enunciado exige coeficientes enteros positivos.

3. Cotas para la profundidad expansiva total

Lema 3.1. Con $\gamma := \frac{\log(31/27)}{2 \log(3/2)} = 0,170360\dots$ se tiene

$$E > \gamma(d - 2m).$$

Demostración. Cada expansión cumple $P_j/q_j < (3/2)^{e_j}$ y cada rama contractiva $R(Q)/Q \leq 27/31$ [2, Lema 6.1]. Multiplicando alrededor del ciclo,

$$1 < \left(\frac{3}{2}\right)^E \left(\frac{27}{31}\right)^N,$$

de donde $N \log(31/27) < E \log(3/2)$. Como $k = N + m$ y $b \leq k$, $d \leq 2k = 2N + 2m < E/\gamma + 2m$. $\square$

Lema 3.2 (Altura lineal). $S < 8,41903d - 3m < 9d$, para todo $m \geq 1$.

Demostración. Cada expansión cumple $q_j/P_j < 9(2/3)^{e_j}$ y cada rama contractiva $R(Q)/Q > 1/4$ [2, Lema 6.1]. El producto de todos los cocientes alrededor del ciclo vale 1, de modo que el producto de los cocientes contractivos es $\prod_j q_j/P_j$, y por tanto

$$4^{-N} < 9^m \left(\frac{2}{3}\right)^E.$$

Tomando logaritmos, $E < \frac{\log 4}{\log(3/2)} N + m \frac{\log 9}{\log(3/2)} = 3,41903 N + 5,41903 m$. La contribución contractiva a S satisface $S_c \leq 5N$, luego $S = E + S_c < 8,41903 N + 5,41903 m$. Finalmente $N = k - m \leq d - m$ da $S < 8,41903 d - 3m$. $\square$

Obsérvese que esta cota no se deteriora al crecer m : es la que permite aplicar la cota de trascendencia con la misma constante para todos los casos.

4. El lema de optimización

Este es el ingrediente nuevo. Escribimos

$$c := \log_2 \frac{3}{2} = 0,5849625\dots, \quad A_j := e_1 + \dots + e_j \quad (A_0 = 0), \quad E = A_m.$$

Lema 4.1 (Optimización). *Sea*

$$t := \max_{1 \leq j \leq m} \{e_j - c A_{j-1}\}.$$

Entonces

$$t \geq \eta_m E, \quad \eta_m := \frac{c}{(1+c)^m - 1}.$$

La constante η_m es óptima: se alcanza la igualdad cuando $e_j = t + c A_{j-1}$ para todo j .

Demostración. Por definición de t se tiene $e_j \leq t + c A_{j-1}$ para todo j , luego

$$A_j = A_{j-1} + e_j \leq (1+c)A_{j-1} + t.$$

Veamos por inducción que $A_j \leq t \frac{(1+c)^j - 1}{c}$. Para $j = 0$ ambos miembros son nulos. Si vale para $j - 1$,

$$A_j \leq (1+c)t \frac{(1+c)^{j-1} - 1}{c} + t = t \frac{(1+c)^j - (1+c) + c}{c} = t \frac{(1+c)^j - 1}{c}.$$

Tomando $j = m$ y despejando se obtiene $t \geq \eta_m E$. Si $e_j = t + c A_{j-1}$ para todo j , las desigualdades anteriores son igualdades y $E = t((1+c)^m - 1)/c$ exactamente. $\square$

Observación 4.2. Los primeros valores son $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 1/(2+c) = 0,386853\dots$, $\eta_3 = 0,196191\dots$. El caso $m = 1$ recupera $t = e_1$, que es lo que se usa en [2]. Nótese además que $\eta_m \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$, hecho sobre el que se vuelve en la Sección 9.

5. Cota exponencial para el mínimo

Lema 5.1 (Cota del mínimo). *Para todo ciclo con m expansiones,*

$$q > \frac{2^{\eta_m \gamma(d-2m)} - 1}{3}.$$

Demostración. Sea j^* un índice donde se alcanza el máximo del Lema 4.1. La condición de cilindro de la expansión E_{j^*} da $q_{j^*} \geq (2^{e_{j^*}} - 1)/3$, igual que en [2, Lema 8.1]. Por otra parte, para alcanzar q_{j^*} desde q se recorren las expansiones $E_1, \dots, E_{j^*-1}$ y bloques contractivos, que solo disminuyen; por tanto $q_{j^*}/q < (3/2)^{A_{j^*-1}}$ y

$$q > q_{j^*} \left(\frac{2}{3}\right)^{A_{j^*-1}} \geq \frac{2^{e_{j^*}} - 1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{A_{j^*-1}}.$$

Como $2/3 = 2^{-c}$,

$$\frac{2^{e_{j^*}} - 1}{3} 2^{-cA_{j^*-1}} = \frac{2^{e_{j^*}-cA_{j^*-1}} - 2^{-cA_{j^*-1}}}{3} \geq \frac{2^t - 1}{3},$$

puesto que $2^{-cA_{j^*-1}} \leq 1$. Finalmente, por los Lemas 4.1 y 3.1, $t \geq \eta_m E > \eta_m \gamma(d-2m)$, y $x \mapsto 2^x - 1$ es creciente. $\square$

Teorema 5.2 (Cota exponencial). *Todo ciclo con m expansiones satisface*

$$0 < \Lambda < \frac{3d}{2(2^{\eta_m \gamma(d-2m)} - 1)}, \quad (2)$$

siempre que $\eta_m \gamma(d-2m) > 0$.

Demostración. Inmediato de (1) y del Lema 5.1. $\square$

Para $m = 1$ se tiene $\eta_1 = 1$ y (2) se reduce literalmente a la cota de [2, Teorema 8.2]. Cuando $d \leq 2m$ la cota es vacía; esos valores de d quedan excluidos por la cota inferior de la Sección 7, pues $2m \leq 16$ para los casos que aquí se tratan.

6. Cota superior para d

La cota de Laurent, Mignotte y Nesterenko se aplica exactamente como en [2, Sec. 9]: con $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 2$, $b_1 = M$, $b_2 = S$, $D = 1$, $\log A_1 = \log 3$ y $\log A_2 = 1$, el Lema 2.2 garantiza coeficientes enteros positivos y el Lema 3.2 da $b' = M + S/\log 3 < 17,19d$, de donde

$$\Lambda > e^{-11792,44} \quad (3)$$

mientras $d \leq 6,6 \times 10^7$; para d mayor la confrontación con (2) es inmediata, igual que allí.

Confrontando (3) con (2) se obtiene un rango finito de d , que se criba después usando que S es entero. La criba se organiza en dos tramos.

Lema 6.1 (Umbral de Legendre). *Sea $U_m(d)$ el miembro derecho de (2) y sea $\alpha = \log 3 / \log(3/2)$. Si d cumple*

$$U_m(d) < \frac{\log(3/2)}{2d},$$

entonces todo d admisible es un denominador de convergente de α .

Demostración. De $\Lambda = d \log(3/2) |\alpha - S/d| < U_m(d)$ se sigue $|\alpha - S/d| < 1/(2d^2)$, y por el teorema de Legendre la fracción reducida S/d es un convergente p_n/q_n de α . Si $d = j q_n$ con $j \geq 1$, entonces $\Lambda = j \log(3/2) |q_n \alpha - p_n|$ crece linealmente con j mientras $U_m(j q_n)$ decrece; basta por tanto considerar $j = 1$. $\square$

Por debajo del umbral la criba se realiza de forma exhaustiva sobre todos los d y todos los enteros S admisibles; por encima se comprueban únicamente los denominadores de convergentes. El resultado es el siguiente.

Proposición 6.2 (Criba). *Todo ciclo con m expansiones satisface $d \leq d_{\max}(m)$, con*

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$d_{\max}(m)$	65	203	568	957	1735	3291	5625	9126	18252	27767	46408

Ningún denominador de convergente situado por encima del umbral sobrevive, en ninguno de los once casos.

Observación 6.3. De hecho, en los once casos se tiene $d_{\max}(m)$ estrictamente menor que el umbral del Lema 6.1: para $m = 11$, por ejemplo, el umbral vale 54 328 y el máximo 46 408. El tramo de convergentes resulta así vacío en todos ellos. Sigue siendo necesario para la demostración —sin él no quedaría excluido que algún d grande sobreviviese—, pero conviene señalar que no aporta ningún superviviente.

Observación 6.4. Para $m = 1$ la Proposición 6.2 devuelve $d \leq 65$ y 388 pares (d, S) , que son exactamente los valores de [2, Teorema 9.4]. Esta coincidencia constituye el control interno más estricto del cálculo: la fórmula general se especializa al caso ya demostrado sin discrepancia alguna.

Observación 6.5. Los valores de $d_{\max}$ no son arbitrarios: 9126, 18252, 27767 y 46408 son, respectivamente, q_8 , $2q_8$, $q_8 + q_9$ y q_{10} en la notación de la Sección 7. La criba se detiene sobre la retícula de denominadores de convergentes y sus combinaciones, que es donde α admite aproximaciones racionales excepcionalmente buenas.

Conviene distinguir lo que en esa tabla es intrínseco de lo que no. Los valores concretos dependen de las constantes empleadas: de la constante 11792,44 de (3), que proviene de una elección particular del parámetro libre de [9, Corollaire 2], y de las estimaciones gruesas $P_j/q_j < (3/2)^{e_j}$ y $S_c \leq 5N$. Afinar cualquiera de ellas reduciría los $d_{\max}(m)$ y ampliaría el alcance en m . Lo que no depende de esas elecciones es la retícula sobre la que caen: cualquier cota de la forma $\Lambda < U(d)$ con U decreciente deja como supervivientes los d donde α se aproxima excepcionalmente bien, y esos son los de la Observación 7.1.

7. Cota inferior para d

Esta parte no depende de m : solo utiliza (1) y la verificación computacional del mínimo. Escribimos $\alpha = \log 3 / \log(3/2) = 2,709511291 \dots$ y, para cada d ,

$$\Lambda_{\min}(d) := \min\{\Lambda > 0\} = d \log 3 - \lfloor \alpha d \rfloor \log \frac{3}{2},$$

que es el menor valor positivo que puede tomar la forma lineal para ese d . Los convergentes de α tienen denominadores

$$q_n : \quad 1, 1, 3, 7, 24, 31, 179, 389, 9126, 18641, 46408, \dots$$

Observación 7.1 (La sucesión de denominadores). Esos denominadores forman la sucesión A046102 de la OEIS [8], catalogada como «denominadores de los convergentes a la coma de Pitágoras». La relación con el caso clásico es directa: si $\delta = \log_2 3$, entonces $\alpha = \delta/(\delta - 1)$, de modo que cada convergente P/Q de δ produce el convergente $P/(P - Q)$ de α ; en efecto, la OEIS registra A046102 = A005663 – A005664, numeradores menos denominadores de los convergentes de $\log_2 3$.

Los denominadores de $\log_2 3$ son 1, 1, 2, 5, 12, 41, 53, 306, 665, 15601, 31867, ..., que son las divisiones de la octava en temperamento igual y, a la vez, los valores que aparecen en las cotas inferiores de [7] para el problema $3x + q$. El tratamiento clásico de los m -ciclos criba, pues, sobre una de las dos sucesiones y el presente sobre la otra: ambas proceden del mismo par de logaritmos, lo que explica que las dos construcciones tropiecen con la misma retícula de obstrucciones.

Lema 7.2 (Verificación computacional). *Ningún entero impar $Q \leq X_0 := 387\,396\,683$ es el mínimo de un ciclo de R .*

Demostración. Para cada impar Q de ese rango se itera R hasta obtener un valor estrictamente menor que Q ; en todos los casos se consigue, con un máximo de 108 iteraciones. Si Q fuese el mínimo de un ciclo su órbita no podría descender por debajo de Q . Véase la Sección 10. $\square$

Teorema 7.3 (Cota inferior). *Todo ciclo periódico positivo no trivial de R , cualquiera que sea su número de expansiones, satisface $d > 27\,766$.*

Demostración. De (1) y del Lema 7.2 se sigue que todo ciclo cumple $0 < \Lambda < d/(2X_0)$. Para un d dado, el menor valor positivo que Λ puede tomar es $\Lambda_{\min}(d)$, de modo que la condición necesaria es

$$\Lambda_{\min}(d) < \frac{d}{2X_0}. \quad (4)$$

La comprobación directa de (4) para todos los enteros $3 \leq d \leq 27\,766$ muestra que ninguno la satisface. El caso más próximo es $d = 18\,252$, con $\Lambda_{\min} = 3,6389 \times 10^{-5}$ frente a $d/(2X_0) = 2,3557 \times 10^{-5}$, que falla todavía por un factor 1,54. El primer d que satisface (4) es $d = 27\,767$. $\square$

Observación 7.4 (La variante por convergentes). La cota anterior puede obtenerse en parte sin comprobación exhaustiva, mediante el argumento clásico de Crandall utilizado en [5]. Si $d < q_{n+1}$, la propiedad de mejor aproximación da $|d\alpha - S| \geq |q_n\alpha - p_n| > 1/(q_n + q_{n+1})$, luego

$$\Lambda > \frac{\log(3/2)}{q_n + q_{n+1}}.$$

Con $n = 7$, es decir $q_7 = 389$ y $q_8 = 9126$, esto vale $4,2613 \times 10^{-5}$, mientras que $d/(2X_0) < 1,1779 \times 10^{-5}$; y el caso $d = q_8$ se descarta aparte, pues $\Lambda_{\min}(9126) = 1,8195 \times 10^{-5}$ excede $9126/(2X_0) = 1,1779 \times 10^{-5}$. Se obtiene así $d > 9126$ sin recorrer ningún rango.

El criterio por convergentes es, pues, suficiente pero no exhaustivo: la comprobación directa del Teorema 7.3 lo mejora de 9126 a 27 766, lo que basta para pasar de $m \leq 8$ a $m \leq 9$.

8. Demostración del resultado principal

Demostración del Teorema 1.1. Supongamos que existe un ciclo periódico positivo no trivial de R con $m \leq 9$ ramas expansivas. La Proposición 6.2 da $d \leq d_{\max}(m) \leq d_{\max}(9) = 18\,252$, y el Teorema 7.3 da $d > 27\,766$, lo cual es imposible. $\square$

Observación 8.1 (Versiones más modestas). Para excluir un m dado no hace falta la verificación completa del Lema 7.2: basta

$$X_0 > \max\{d/(2\Lambda_{\min}(d)) : d \leq d_{\max}(m)\},$$

cantidad que la tabla siguiente recoge.

m	$d_{\max}(m)$	X_0 necesario
1	65	2 934
2	203	$8,76 \times 10^4$
3	568	$2,91 \times 10^5$
4	957	$5,12 \times 10^5$
5	1 735	$1,03 \times 10^6$
6	3 291	$2,45 \times 10^6$
7	5 625	$6,85 \times 10^6$
8	9 126	$2,51 \times 10^8$
9	18 252	$2,51 \times 10^8$
10	27 767	$1,27 \times 10^9$
11	46 408	$6,33 \times 10^9$

Así, $X_0 = 10^5$ excluye $m \leq 2$ y $X_0 = 10^7$ excluye $m \leq 7$, en ambos casos con cálculos de segundos. El salto entre $m = 7$ y $m = 8$ se debe a que $\Lambda_{\min}(9126)$ es excepcionalmente pequeña, pues $24727/9126$ es un convergente de α precedido por el cociente parcial $a_8 = 23$. Obsérvese además que $m = 9$ no cuesta nada sobre $m = 8$: ambos requieren el mismo X_0 .

9. Alcance y límite del método

Los escalones siguientes se leen de la tabla de la Observación 8.1: pasar de $m \leq 9$ a $m \leq 10$ exige $X_0 > 1,27 \times 10^9$, algo más de tres veces la verificación realizada, y llegar a $m \leq 11$ exige $X_0 > 6,33 \times 10^9$, unas dieciséis veces. El rendimiento decrece con rapidez.

La razón de fondo está en la Observación 4.2: como

$$\eta_m = \frac{c}{(1+c)^m - 1} \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty),$$

el exponente $\eta_m \gamma$ de (2) tiende a cero y la cota superior $d_{\max}(m)$ crece aproximadamente como $(1+c)^m$, es decir, de forma exponencial en m . El método proporciona, por tanto, una demostración para cada m fijo, pero no una constante uniforme en m y en consecuencia no alcanza la unicidad del ciclo. Esta limitación es la misma que presenta el tratamiento clásico de los m -ciclos del problema $3n+1$.

10. La parte computacional

La demostración contiene tres cálculos finitos.

1. La criba de la Proposición 6.2. Exhaustiva por debajo del umbral del Lema 6.1 y restringida a denominadores de convergentes por encima. Los umbrales son 97, 298, 652, 1260,

2287, 4011, 6887, 11668, 19594, 32700 y 54328 para $m = 1, \dots, 11$. El cálculo emplea aritmética de precisión arbitraria; repetido con 60 y con 250 dígitos decimales produce resultados idénticos.

2. El lema de optimización. Aunque el Lema 4.1 está demostrado, se comprueba además por muestreo que la desigualdad se cumple y que el caso extremo la satura, lo que confirma la optimalidad de η_m .

3. La verificación del mínimo. Los 193 698 341 enteros impares con $3 \leq Q \leq 387\,396\,683$, con un máximo de 108 iteraciones hasta descender. Es el cómputo más costoso; el Teorema 1.1 necesita en realidad solo $X_0 > 2,51 \times 10^8$, y la Observación 8.1 indica qué se obtiene con verificaciones mucho menores.

4. La criba de la cota inferior. La comprobación de (4) para los 27 764 enteros $3 \leq d \leq 27\,766$, con aritmética de precisión arbitraria. Es instantánea.

El código completo, escrito en Python 3 y con la sola dependencia de `mpmath`, está disponible en

https://www.collatz.es/articulos/seccion7_3/verificacion_Um_73.py

Ejecutado sin argumentos reproduce, en el orden en que se demuestran, el lema de optimización, la criba y la cota inferior; el modo **grande** realiza la verificación completa del mínimo. Su huella SHA-256 es

c70960cacf365946cad60e7e959672d4
1a04699a7d702199045e7a144657cb55

11. Conclusiones

1. El Lema 4.1 cuantifica la amortiguación que las expansiones anteriores imponen sobre el efecto de la expansión más profunda, mediante una constante óptima $\eta_m = c/((1+c)^m - 1)$ con $c = \log_2(3/2)$.
2. De él se deduce que el mínimo de un ciclo con m expansiones crece como $2^{\eta_m \gamma(d-2m)}$, y por tanto que Λ es exponencialmente pequeña en d para cada m fijo.
3. La cota de altura $S < 9d$ se mantiene uniforme en m , lo que permite aplicar la cota de trascendencia con la misma constante en todos los casos.
4. La criba resultante da las cotas $d_{\max}(m)$ de la Proposición 6.2, que para $m = 1$ reproducen exactamente los valores de [2].
5. La cota inferior $d > 27\,766$ no depende de m y se obtiene por comprobación directa de la condición necesaria $\Lambda_{\min}(d) < d/(2X_0)$; el argumento clásico por convergentes da solo $d > 9126$.
6. En consecuencia, no existen ciclos con nueve ramas expansivas o menos (Teorema 1.1).
7. El método no se extiende a todo m simultáneamente, porque $\eta_m \rightarrow 0$; queda abierta la unicidad del ciclo.

Referencias

- [1] M. Cerdá Bennassar, *Un sistema dinámico sobre enteros y mitades de impares*, 2026. Disponible en `collatz.es`.
- [2] M. Cerdá Bennassar, *Inexistencia de ciclos con una única expansión en un mapa de retorno sobre los impares*, 2026. Disponible en `collatz.es`.
- [3] R. P. Steiner, *A theorem on the Syracuse problem*, Proceedings of the Seventh Manitoba Conference on Numerical Mathematics and Computing, 1977, 553–559.
- [4] J. L. Simons, *On the nonexistence of 2-cycles for the $3x + 1$ problem*, Mathematics of Computation **74** (2005), 1565–1572.
- [5] J. L. Simons and B. M. M. de Weger, *Theoretical and computational bounds for m -cycles of the $3n + 1$ problem*, Acta Arithmetica **117** (2005), 51–70.
- [6] C. Hercher, *There are no Collatz m -cycles with $m \leq 91$* , Journal of Integer Sequences (2023); arXiv:2201.00406.
- [7] J. L. Simons, *On the (non-)existence of m -cycles for generalized Syracuse sequences*, Acta Arithmetica **131** (2008), n.º 3, 217–254.
- [8] OEIS Foundation Inc., *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, sucesiones A046102, A005663 y A005664. <https://oeis.org/A046102>
- [9] M. Laurent, M. Mignotte and Y. Nesterenko, *Formes linéaires en deux logarithmes et déterminants d'interpolation*, Journal of Number Theory **55** (1995), 285–321.