

Curva, teselación y grafo en los ornamentos de Collatz

Miguel Cerdá Bennassar

Octubre de 2026

Resumen

Lothar Collatz dedicó a los ornamentos geométricos trabajos separados por más de cincuenta años. En este escrito se ordena ese material en torno a tres objetos distintos: la curva, definida por una ecuación con valores absolutos; la teselación, partición del plano en piezas; y el grafo, que retiene solo la estructura de conexiones de la teselación. Para el primero se estudian las sumas de proyecciones absolutas y se muestra cómo se obtiene el triángulo equilátero. Para el segundo se describen el cenicero, el parquet de triángulos y heptágonos de 1935 y una partición aleatoria. Para el tercero se exponen las signaturas, el tableau y la fórmula principal de Collatz, con una demostración mediante la fórmula de Euler y su comprobación en las láminas del propio Collatz.

1. Introducción

Collatz publicó en 1934 un artículo sobre ecuaciones de curvas con valores absolutos destinadas a la construcción de ornamentos [1]. Medio siglo después volvió sobre el tema en su conferencia de Augsburgo [4] y en un artículo en el que estudia las teselaciones doblemente periódicas desde la teoría de grafos, y no desde los grupos de simetría [5]. Entre ambos extremos quedan sus dibujos y objetos ornamentales, documentados por la Universidad de Hamburgo [6, 7].

Conviene distinguir tres objetos que en este material aparecen mezclados.

- La *curva*: el conjunto de nivel de una función definida con valores absolutos. Es un objeto métrico y analítico.
- La *teselación*: una partición del plano en piezas cerradas de interiores disjuntos. Es un objeto geométrico; las curvas de la primera clase pueden ser las fronteras de sus piezas.
- El *grafo*: el esqueleto de la teselación, con las esquinas como vértices y los bordes como aristas. Es un objeto combinatorio, que no depende de la forma métrica de las piezas.

Cada sección se ocupa de uno de ellos.

2. La curva: ecuaciones con valores absolutos

2.1. Sumas de proyecciones absolutas

Para un entero $n \geq 3$ y $u_k = (\cos(2\pi k/n), \sin(2\pi k/n))$, $0 \leq k < n$, sea

$$N_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} |\langle (x, y), u_k \rangle| = \sum_{k=0}^{n-1} \left| x \cos \frac{2\pi k}{n} + y \sin \frac{2\pi k}{n} \right|.$$

La función N_n es convexa, positivamente homogénea y par: $N_n(-x, -y) = N_n(x, y)$. Su conjunto de nivel $\{N_n = c\}$, con $c > 0$, es por tanto una curva convexa cerrada con simetría central.

Proposición 1. *Si n es impar, el conjunto $\{N_n = c\}$ es un $2n$ -gono regular. Si n es par, es un n -gono regular.*

Demostración. La función N_n es lineal en cada sector del plano limitado por las semirrectas en que se anula algún sumando, es decir, por las rectas que pasan por el origen perpendiculares a los u_k . Su conjunto de nivel es, pues, un polígono cuyos vértices están sobre esas semirrectas. Si n es impar, los $2n$ vectores $\pm u_k$ son distintos y están igualmente espaciados con ángulo π/n ; las n rectas dan $2n$ semirrectas, y el giro de ángulo π/n deja invariante el conjunto $\{\pm u_k\}$ y por tanto N_n . Se obtiene un $2n$ -gono regular. Si n es par, $u_{k+n/2} = -u_k$, de modo que $N_n = 2 \sum_{k < n/2} |\langle (x, y), u_k \rangle|$; hay $n/2$ rectas, n semirrectas y simetría bajo el giro de ángulo $2\pi/n$. Se obtiene un n -gono regular. $\square$

El caso $n = 3$ merece atención. La curva

$$F(x, y) = |x| + \left| -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \right| + \left| -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \right| = c \quad (1)$$

no es un triángulo, sino un hexágono regular: sus vértices están en las direcciones $30^\circ + 60^\circ k$, a distancia $c/\sqrt{3}$ del origen, pues $F(\cos 30^\circ, \sin 30^\circ) = \sqrt{3}$, y sus lados están a distancia $c/2$ del origen. En general, ninguna función par puede tener un triángulo como conjunto de nivel, porque el triángulo carece de simetría central.

Del mismo modo, para $\lambda \geq 0$ la familia

$$|x| + |y| + \lambda \frac{|x+y| + |x-y|}{\sqrt{2}} = c$$

da el cuadrado $|x| + |y| = c$ para $\lambda = 0$ y un octógono para $\lambda > 0$, que es regular exactamente para $\lambda = 1$: en ese caso los vértices sobre los ejes y sobre las diagonales están a la misma distancia $c/(1 + \sqrt{2})$ del origen. Para $\lambda > 0$, la distancia radial de los vértices axiales es $c/(1 + \sqrt{2}\lambda)$ y la de los diagonales es $c/(\sqrt{2} + \lambda)$; ambas coinciden exactamente cuando $\lambda = 1$.

2.2. El triángulo equilátero

Para obtener un triángulo hay que anidar los valores absolutos. El triángulo equilátero de vértice superior $(0, 2c)$ y lado inferior en $y = -c$ es el conjunto de nivel

$$\max\left(-y, \frac{\sqrt{3}x+y}{2}, \frac{-\sqrt{3}x+y}{2}\right) = c.$$

Aplicando dos veces la identidad $\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$ se llega a la ecuación

$$T(x, y) = \frac{1}{4}(\sqrt{3}|x| - y + |3y + \sqrt{3}|x||) = c, \quad (2)$$

que solo contiene valores absolutos. Para $x = 0$ da $y/2 = c$ si $y > 0$ e $-y = c$ si $y < 0$, de acuerdo con el vértice y el lado indicados. Es una ecuación del tipo que Collatz llamaba *Kurvengleichung mit Absolutstrichen* [1].

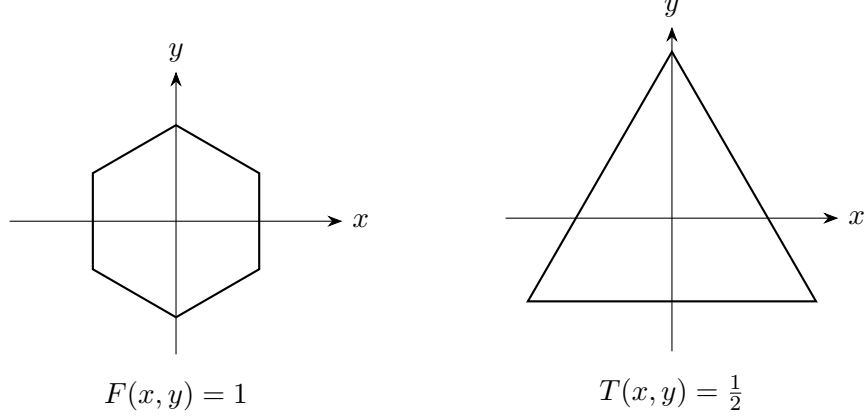


Figura 1: A la izquierda, el hexágono regular definido por (1); a la derecha, el triángulo equilátero definido por (2).

2.3. Una desigualdad del artículo de 1934

En el mismo artículo de 1934 figura, según la reproduce C. Moler [9], la desigualdad

$$\left| \left| |x| - 1 \right| - 1 \right| - \left| \left| |y| - 1 \right| - 1 \right| \geq \frac{1}{3}, \quad -4 \leq x, y \leq 4.$$

La función $g(t) = \left| \left| |t| - 1 \right| - 1 \right|$ es una línea quebrada de pendientes ± 1 , y la diferencia $g(x) - g(y)$ se anula sobre segmentos de pendiente ± 1 . La desigualdad suprime bandas alrededor de esos segmentos y deja una región formada por piezas poligonales que se repiten. Una sola fórmula describe así una región ornamental poligonal; esto no prueba, por sí solo, que sus piezas se prolonguen a una teselación periódica. Con ello se pasa del primer objeto al problema geométrico del segundo.

3. La teselación

3.1. De la curva a la pieza

Una teselación es una partición del plano en piezas cerradas, de interiores disjuntos, que lo cubren por completo. Es doblemente periódica si la dejan invariante dos traslaciones independientes. Las tres teselaciones regulares tienen como pieza una curva de la sección anterior: el cuadrado $\frac{1}{2}(|x + y| + |x - y|) = c$, es decir $\max(|x|, |y|) = c$; el hexágono (1); y el triángulo (2), que tesela el plano junto con su simétrico respecto de un lado. Cuando las piezas son trasladadas de una sola curva, la ecuación fija la forma y el retículo de traslaciones fija la disposición.

Las teselaciones pueden clasificarse por las isometrías que las dejan invariantes. Collatz adoptó en [5] otro criterio, que no atiende a la simetría sino a la estructura de conexiones; es el objeto de la sección 4.

3.2. El cenicero

La Figura 2 muestra un cenicero cerámico diseñado por Collatz. Su superficie es la teselación por triángulos equiláteros, pintada con cinco colores. En la notación de la sección 4, cada pieza tiene tres esquinas de grado 6, y la estructura es 6^3 .



Figura 2: Cenicero ornamental diseñado por L. Collatz: teselación por triángulos equiláteros, estructura 6^3 .

3.3. El parquet de triángulos y heptágonos

La Figura 3 reproduce una lámina de Collatz fechada en 1935, *Parkettierung aus Drei- und Siebenecken* [6]. Sus heptágonos no son regulares, ni pueden serlo: en una teselación lado a lado por polígonos regulares los ángulos que concurren en un vértice suman 360° , y el ángulo del heptágono regular, $900^\circ/7$, no se completa hasta 360° con ángulos de 60° ni de $900^\circ/7$. Las piezas de Collatz son heptágonos en sentido topológico, deformados para encajar con los triángulos. Lo que la lámina fija no es la métrica sino las conexiones: en ella concurren tres piezas en cada vértice. Si el patrón es doblemente periódico y todos sus vértices tienen grado 3, la fórmula principal determina una proporción de tres heptágonos por cada triángulo. Esa conclusión es condicional: no sustituye la lectura y verificación de todas las incidencias de la lámina.



Foto 10: Un mosaico 3-7 de Collatz de 1935

Figura 3: Parquet de triángulos y heptágonos de L. Collatz, 1935 (Foto 10 en [6]).

3.4. Una partición aleatoria

En el mismo dossier se reproduce una tableta de chocolate partida al azar (Figura 4). Es también una partición en piezas poligonales convexas, pero sin traslaciones que la dejen invariante. No constituye por sí misma una teselación doblemente periódica del plano y, por tanto, no entra directamente en el marco de la sección siguiente.



Foto 9: Disección aleatoria de una barra de chocolate

Figura 4: Partición aleatoria de una tableta de chocolate (Foto 9 en [6]).

3.5. Un modelo matemático de la partición aleatoria

Como construcción ilustrativa del autor de este escrito, y no como una construcción atribuida a Collatz, pueden trazarse rectas $L_i : x \cos \theta_i + y \sin \theta_i = b_i$ que corten un rectángulo. En posición general, las rectas lo dividen en regiones convexas. Si se escogen aleatoriamente las direcciones y las posiciones, se obtiene un modelo sencillo de disección aleatoria, aunque no necesariamente la misma distribución que la fotografía histórica.

El vínculo analítico con los valores absolutos es la función

$$G(x, y) = \sum_{i=1}^m w_i |x \cos \theta_i + y \sin \theta_i - b_i|, \quad w_i > 0.$$

Su conjunto de puntos de no diferenciabilidad es precisamente la unión de las rectas L_i , siempre que las rectas sean distintas: cada sumando presenta un cambio de pendiente transversal que los pesos positivos no pueden cancelar. Este modelo permite describir los bordes de la partición sin confundirlos con las curvas de nivel $\{G = c\}$.

4. El grafo

4.1. Signaturas y tableau

Sea G el grafo infinito cuyos vértices son las esquinas de una teselación doblemente periódica y cuyas aristas son los bordes de sus piezas. El grado d de un vértice cuenta las incidencias de extremos de aristas (un lazo cuenta dos). Si el recorrido del borde de una pieza F_j tiene n_j incidencias de esquina (contadas con multiplicidad), su *signatura* es la sucesión de los grados de esas esquinas, anotados en el orden en que se recorre el borde:

$$\text{sign}(F_j) = (d_{j1}, d_{j2}, \dots, d_{jn_j}).$$

El *tableau* es la colección de las signaturas de las piezas de un dominio fundamental [5]. Se escriben de forma compacta, con exponentes para las repeticiones y un factor delante para las piezas repetidas: 4^4 es la signatura del cuadrado de la cuadrícula, 3^6 la del hexágono del panal, y $2 \cdot (16\ 8\ 3)$ indica dos piezas de signatura $(16, 8, 3)$. Sean p el número de piezas del tableau, $N = \sum_j n_j$ el número total de entradas y

$$S = \sum_j \sum_{i=1}^{n_j} \frac{1}{d_{ji}}$$

la suma de los recíprocos de todas las entradas.

Definición 2. Una teselación es *limpia* si no tiene vértices de grado 1 (tallos) ni de grado 2 (pseudoesquinas), es decir, si $d \geq 3$ en todo vértice.

4.2. La fórmula principal

Teorema 3 (Fórmula principal de Collatz [5]). *Sea una teselación doblemente periódica que induzca una descomposición celular finita del toro al identificar un retículo de traslaciones. Contando las esquinas con multiplicidad de incidencia, su tableau satisface*

$$S + p - \frac{N}{2} = 0, \quad \text{equivalentemente} \quad \sum_j \left(\sum_{i=1}^{n_j} \frac{1}{d_{ji}} - \frac{n_j}{2} + 1 \right) = 0.$$

Demostración. Se elige un subretículo de traslaciones suficientemente amplio para obtener un cociente celular sobre el toro, con V vértices, E aristas y F caras. La fórmula de Euler proporciona $V - E + F = 0$. Por definición, $F = p$. Cada arista posee dos lados incidentes, contados incluso cuando ambos pertenecen a una misma cara; por ello, $N = 2E$. Asimismo, un vértice de grado d aporta d incidencias de esquina, cada una de peso $1/d$; por consiguiente, $S = V$. Sustituyendo se obtiene $S - N/2 + p = 0$. $\square$

Corolario 4. *En el tableau de un dominio fundamental completo, N es par y S es entero. Además, necesariamente $S = N/2 - p$.*

Observación 5. La fórmula principal es una *condición necesaria*, no una condición suficiente de realizabilidad. Un tableau puede satisfacer la identidad y, aun así, no admitir una teselación con las incidencias y el orden cíclico prescritos. En particular, una sola signatura formal puede satisfacer la identidad sin constituir por sí sola un dominio fundamental completo.

Observación 6. La identidad es homogénea en las multiplicidades de las piezas: puede presentarse una lista abreviada obtenida al dividir todas ellas por un factor común. En esa notación reducida pueden aparecer N impar y S semientero, como en algunas filas de la Tabla 1. Tales filas no representan por sí solas dominios fundamentales completos; para uno de estos últimos, $S = V \in \mathbb{Z}$ y $N = 2E$ es par.

4.3. Comprobaciones

La Tabla 1 aplica el Teorema 3 a las estructuras de las secciones anteriores y a las triangulaciones de las láminas de Collatz.

Estructura	Tableau	p	N	S	$\frac{N}{2} - p$
Cuadrícula	4^4	1	4	1	1
Panal	3^6	1	6	2	2
Triángulos (cenicero)	6^3	1	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Pentágonos	43433	1	5	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
Pentágonos	44333	1	5	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
Triangulación	16 16 3, $2 \cdot (16\ 8\ 3)$	3	9	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
Triangulación	885, $2 \cdot (855)$	3	9	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
Triangulación	777, $2 \cdot (774)$	3	9	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
Triángulos y heptágonos (modelo)	$3^3, 3 \cdot (3^7)$	4	24	8	8

Cuadro 1: Comprobación de la fórmula principal.

La última fila se deduce de la propia fórmula. Si todos los vértices tienen grado 3, la contribución de una pieza de n lados es $\frac{n}{3} - \frac{n}{2} + 1 = 1 - \frac{n}{6}$: vale $+\frac{1}{2}$ para un triángulo y $-\frac{1}{6}$ para un heptágono. Para que la suma sea nula ha de haber tres heptágonos por cada triángulo, y una lista formal de signaturas con esa proporción es $3^3, 3 \cdot (3^7)$. La identidad no demuestra por sí sola que ese tableau sea realizable ni que describa exactamente la lámina.

4.4. Característica

Definición 7. La *característica* γ de una teselación es el menor número de esquinas de una de sus piezas.

Proposición 8. *En una teselación limpia, $\gamma \leq 6$.*

Demostración. Si $d \geq 3$ en todo vértice, la contribución de la pieza F_j a la suma del Teorema 3 es a lo sumo $\frac{n_j}{3} - \frac{n_j}{2} + 1 = 1 - \frac{n_j}{6}$. Si todas las piezas tuvieran $n_j \geq 7$, todas las contribuciones serían negativas y la suma no podría anularse. $\square$

Con tallos o lazos la característica puede ser tan grande como se quiera; la Figura 9 reúne ejemplos de Collatz con γ entre 1 y 10.

4.5. Familias

Collatz agrupa las teselaciones en familias: la familia $\mathcal{F} = \{k_1, \dots, k_s\}$, con $k_1 > \dots > k_s > 0$, es el conjunto de las teselaciones cuyo tableau contiene todos los números k_j y ningún otro, y a cada familia le asocia un rango [5]. La cuadrícula y el panal pertenecen a las familias $\{4\}$ y $\{3\}$; las triangulaciones de la Tabla 1, a $\{16, 8, 3\}$, $\{8, 5\}$ y $\{7, 4\}$.

4.6. Láminas de Collatz

Las figuras siguientes reproducen láminas de Collatz. Son topológicas: la forma métrica de las piezas puede deformarse sin alterar el grafo, y así una misma estructura admite realizaciones muy distintas.

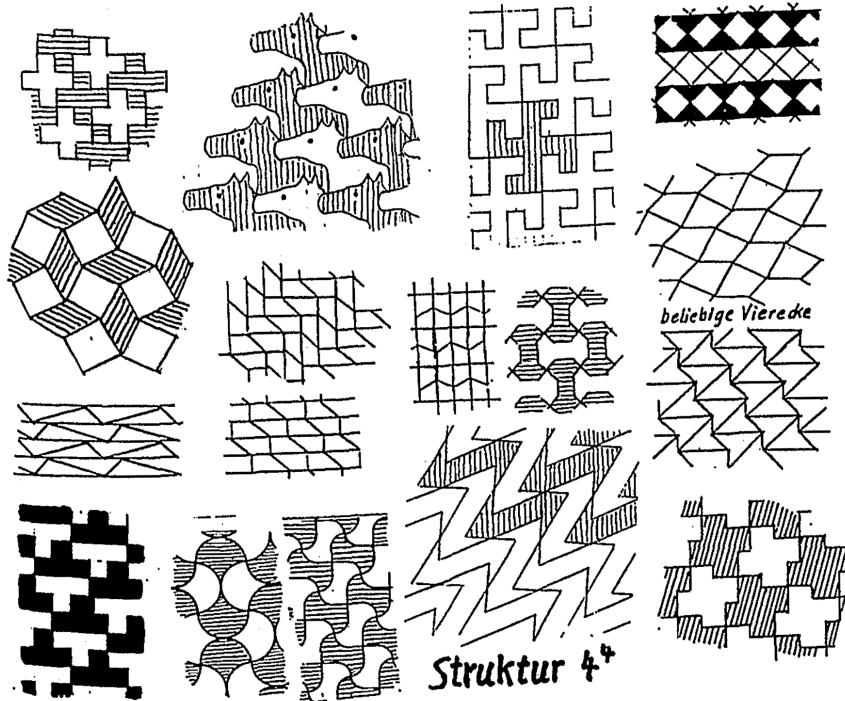


Figura 5: Realizaciones de la estructura 4^4 .

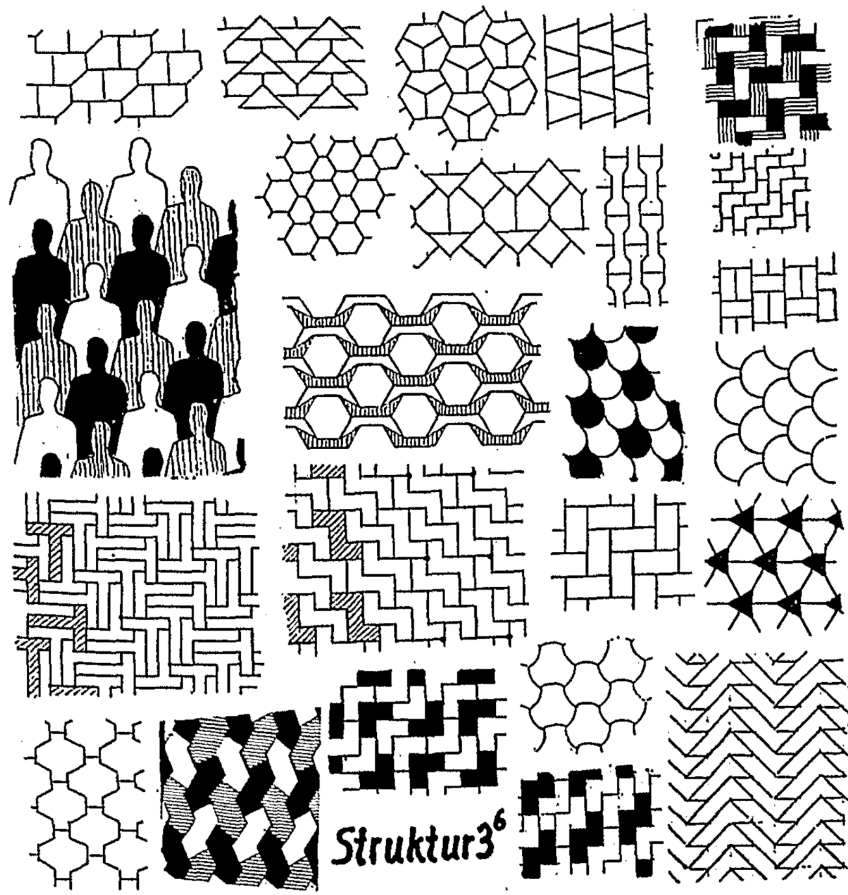


Figura 6: Realizaciones de la estructura 3^6 .

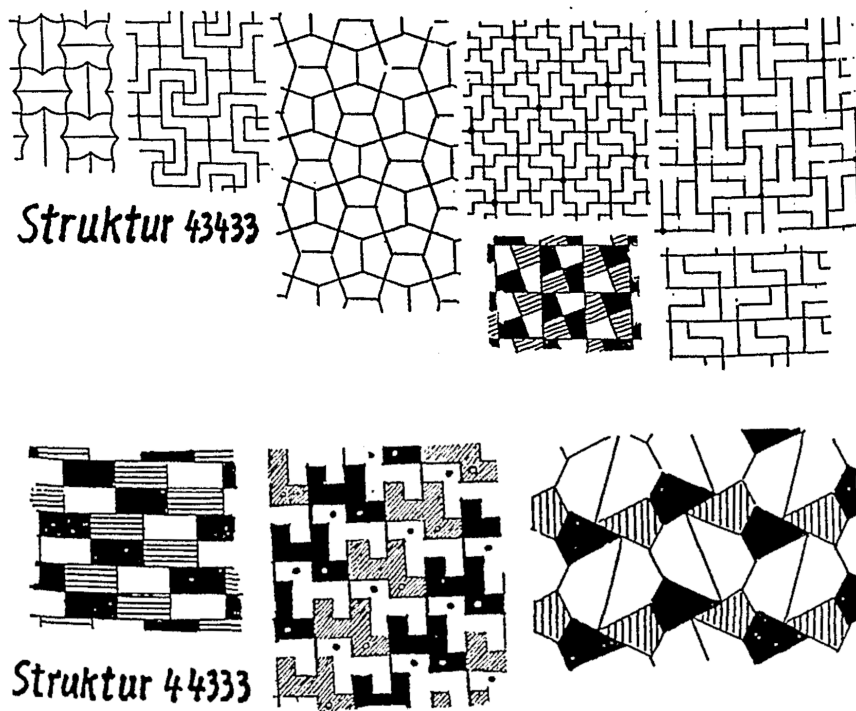


Figura 7: Estructuras 43433 y 44333. Difieren en si las dos esquinas de grado 4 de cada pentágono son contiguas o no.

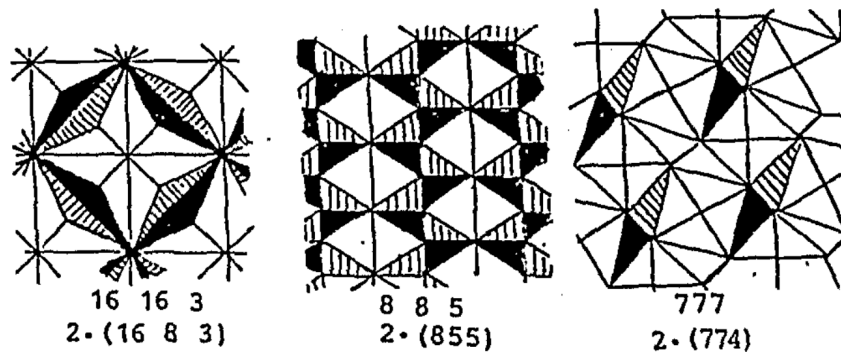


Figura 8: Triangulaciones con tableaux 16 16 3, 2 · (16 8 3); 885, 2 · (855); y 777, 2 · (774).

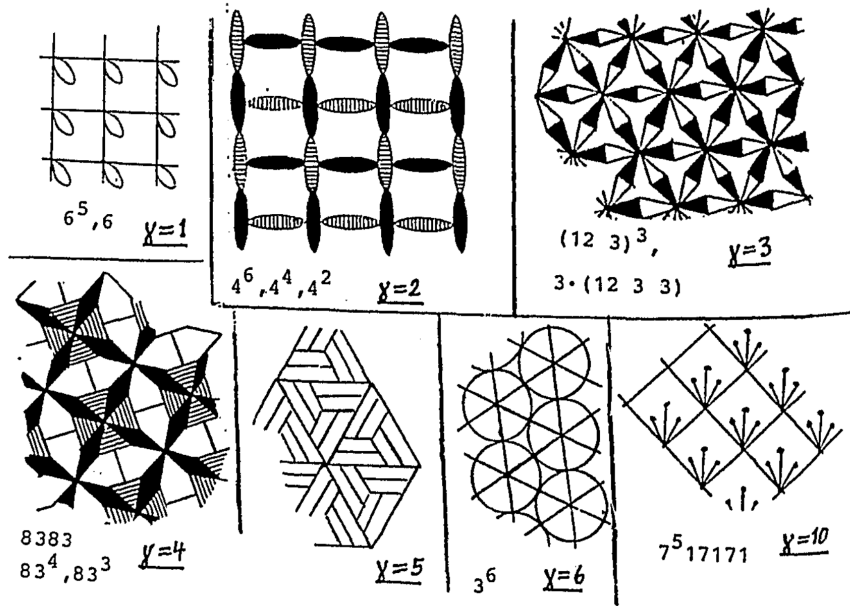


Figura 9: Teselaciones con característica $\gamma = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10$.

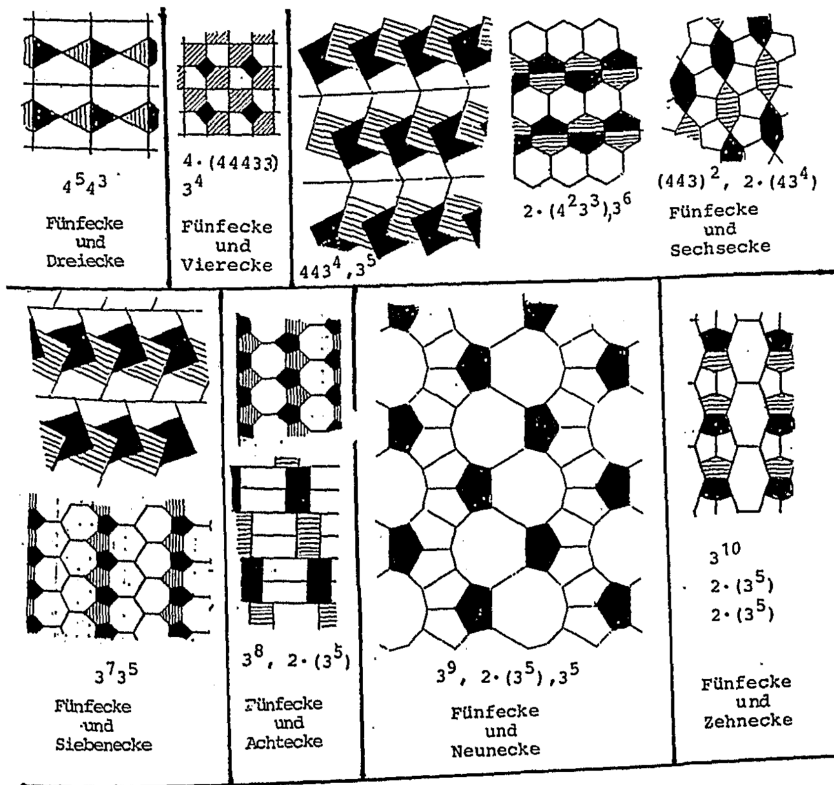


Figura 10: Teselaciones por pentágonos y n -gonos, $3 \leq n \leq 10$, en sentido topológico.

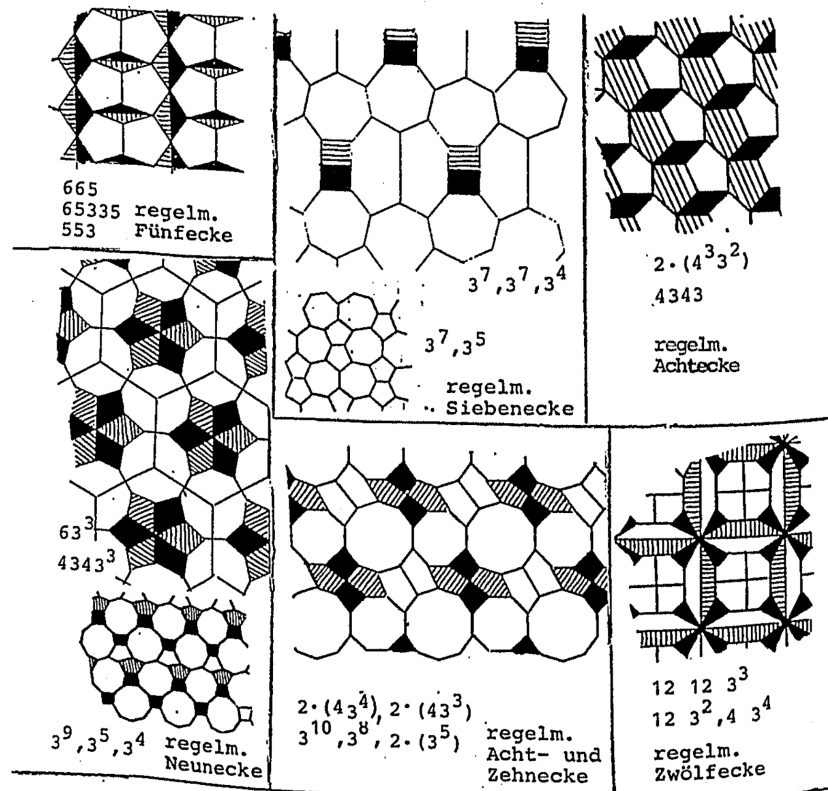


Figura 11: Realizaciones con polígonos regulares de algunas de las estructuras anteriores.

5. Conclusiones y cuestiones

Los tres objetos responden a preguntas distintas. La curva se determina por una ecuación, y la Proposición 1 muestra que una suma de proyecciones absolutas da siempre un polígono con simetría central; el triángulo exige valores absolutos anidados. La teselación añade la disposición de las piezas en el plano. El grafo prescinde de la métrica y conserva las conexiones, y satisface, entre otras condiciones de consistencia, la fórmula principal.

Se plantean varias cuestiones matemáticas; no se afirma aquí que permanezcan abiertas en toda la literatura actual. La primera es la realizabilidad: dar criterios efectivos para decidir si un tableau que cumple la fórmula principal corresponde a alguna teselación. La segunda es la coloración: decidir, a partir de las signaturas, cuántos colores bastan para que dos piezas con una arista común tengan colores distintos. La tercera concierne a las curvas: determinar qué piezas de una teselación dada admiten una ecuación con valores absolutos de pocos términos, y cuál es el menor número de términos necesario.

Referencias

- [1] L. Collatz, Gleichungen geometrischer Ornamente (Kurvengleichungen mit Absolutstrichen), *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* **64** (1934), 165–169.

- [2] L. Collatz, Einige Beziehungen zwischen Graphen, Geometrie und Kombinatorik, *International Series of Numerical Mathematics* **29** (1975), 27–56.
- [3] L. Collatz, Graphen bei Ornamenten und Verzweigungsdiagrammen, en *Numerische Methoden bei Optimierungsaufgaben*, vol. 3, *International Series of Numerical Mathematics* **36** (1977), 23–46. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-5936-3_2.
- [4] L. Collatz, *Geometrische Ornamente*, Vortrag anlässlich der Verleihung der Ehrendoktorwürde durch die Naturwissenschaftliche Fakultät der Universität Augsburg am 12. November 1985, Augsburg, 1986.
- [5] L. Collatz, Strukturen geometrischer Ornamente, *Journal of Geometry* **31** (1988), 42–64. <https://doi.org/10.1007/BF01222384>.
- [6] *Lothar Collatz – Schüler, Lehrer, Mensch*, OR-News **64** (2018). https://www.math.uni-hamburg.de/home/collatz/Lothar-Collatz_Schueler-Lehrer-Mensch_aus_OR-News-64.pdf.
- [7] Universität Hamburg, Fachbereich Mathematik, *Homepage Lothar Collatz*. <https://www.math.uni-hamburg.de/home/collatz/>.
- [8] Universität Hamburg, *Collatz-Logo – Information*. https://www.math.uni-hamburg.de/collatz2000/collatzlogo_inf_en.html.
- [9] C. Moler, An ornamental geometric inequality, *Cleve's Corner*, MathWorks, 16 de marzo de 2015. <https://blogs.mathworks.com/cleve/2015/03/16/an-ornamental-geometric-inequality/>.