

Predecesores de enlace en la representación triangular canónica de Collatz

Miguel Cerdá Bennassar

Septiembre de 2026

Resumen

En la representación triangular canónica del problema $3x + 1$, cada fila de la familia $\mathcal{T} = \{T(a) : a \equiv 0, 4 \pmod{6}\}$ posee un único *enlace*: el impar que resulta de despojar su cierre de toda potencia de 2. Se describe aquí la relación inversa. Se prueba que, para cada impar M , las filas cuyo enlace vale exactamente M están en biyección con los enteros $r \geq 1$, con altura y genoma dados por valuaciones explícitas; la altura de la fila padre no es un parámetro libre, sino la función $n_M(r) = \nu_3(2^r M + 1)$. Se determina la distribución exacta de esas alturas: bajo $\gcd(M, 3) = 1$ el conjunto $\{r : n_M(r) \geq k\}$ es una única clase de residuos módulo $2 \cdot 3^{k-1}$, de donde las densidades $1/2$ y 3^{-k} ; y se caracteriza el caso degenerado $3 \mid M$, en el que todos los padres son semillas. Se completa después la estructura de las cargas ν_2 de los cierres, mostrando que la irregularidad profunda queda confinada a las clases $a \equiv 0, 2 \pmod{8}$. Ninguno de estos resultados implica la terminación de las trayectorias; se explica por qué, y se aísla el término que lo impide.

Índice

1. Marco y notación	1
2. Parametrización exacta de los padres	3
3. El caso degenerado: enlaces divisibles por tres	5
4. Ley de alturas	5
4.1. Ejemplos	7
5. Cargas de los cierres	7
6. Una advertencia sobre potenciales	8
7. Límites	10
Referencias	11

1. Marco y notación

La representación triangular se introdujo en [1]. Para que este trabajo pueda leerse por separado, se recogen aquí sus definiciones y se demuestran los dos hechos del marco que

después se emplean: la localización canónica de los enteros (Proposición 1) y la identificación del enlace con un tramo de la dinámica de Collatz (Proposición 2).

Para $a \in \mathbb{N}_0$, el triángulo $T(a)$ tiene por celdas

$$c_{n,j}^{(a)} = (a+1)2^{n-j+1}3^{j-1} - 1, \quad n \geq 0, \quad 1 \leq j \leq n+1,$$

y se llama *genoma* de $T(a)$ al entero $a+1$. El triángulo es *primitivo* cuando $\gcd(a+1, 6) = 1$, lo que equivale a $a \equiv 0, 4 \pmod{6}$; la *familia canónica* es $\mathcal{T} = \{T(a) : a \equiv 0, 4 \pmod{6}\}$. La fila n -ésima $f_n^{(a)}$ tiene por *cierre* su última celda,

$$L_n^{(a)} = c_{n,n+1}^{(a)} = (a+1)3^n - 1,$$

que es siempre par, pues $L_n^{(a)} + 1 = (a+1)3^n$ es impar.

Proposición 1 (Localización canónica). *La aplicación que a cada $N \in \mathbb{N}_0$ asigna la terna (a, n, j) determinada por*

$$N+1 = 2^\alpha 3^\beta (a+1), \quad \gcd(a+1, 6) = 1, \quad n = \alpha + \beta, \quad j = \beta + 1, \quad (1)$$

es una biyección entre $\mathbb{N}_0$ y el conjunto de las celdas de la familia canónica $\mathcal{T}$. En particular, cada entero ocupa una única celda de un único triángulo primitivo.

Demostración. Poniendo $\alpha = n - j + 1$ y $\beta = j - 1$, el par (α, β) recorre $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ cuando (n, j) recorre $\{n \geq 0, 1 \leq j \leq n+1\}$ —dados $\alpha, \beta \geq 0$ basta tomar $j = \beta + 1$, $n = \alpha + \beta$ —, de modo que el conjunto de todas las celdas de $\mathcal{T}$ es

$$\{(a+1)2^\alpha 3^\beta - 1 : \gcd(a+1, 6) = 1, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0\}.$$

Basta pues probar que $N \mapsto (\alpha, \beta, a+1)$, con $N+1 = 2^\alpha 3^\beta (a+1)$ y $\gcd(a+1, 6) = 1$, es biyectiva. Para $N \in \mathbb{N}_0$ se tiene $N+1 \geq 1$, y el teorema fundamental de la aritmética proporciona una única escritura de esa forma, con $\alpha = \nu_2(N+1)$, $\beta = \nu_3(N+1)$ y $a+1$ el núcleo coprimo con 6: eso da la unicidad y la inyectividad. Recíprocamente, toda terna admisible proviene de $N = 2^\alpha 3^\beta (a+1) - 1 \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Definición 1 (Enlace). El *enlace* de la fila $f_n^{(a)}$, con $(a, n) \neq (0, 0)$, es el impar

$$\Lambda(f_n^{(a)}) = \frac{L_n^{(a)}}{2^{\nu_2(L_n^{(a)})}}.$$

Por (1), $\Lambda(f_n^{(a)})$ ocupa una única celda de un único triángulo primitivo, lo que induce una aplicación total y determinista $\Lambda : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ sobre el conjunto

$$\mathcal{F} = \{f_n^{(a)} : a \equiv 0, 4 \pmod{6}, n \geq 0\} \setminus \{f_0^{(0)}\}.$$

La fila $f_1^{(0)}$ es un punto fijo: su cierre es $L_1^{(0)} = 2$ y su enlace es 1, que es la primera celda de esa misma fila.

Que esta aplicación sea la dinámica de Collatz, y no una recursión aritmética cualquiera, es lo que justifica el resto del trabajo. Se prueba a continuación.

Lema 1 (Avance en fila). *Para $1 \leq j \leq n$ se tiene*

$$3(c_{n,j}^{(a)}) + 1 = 2c_{n,j+1}^{(a)}.$$

Demostración. Sustituyendo $c_{n,j}^{(a)} = (a+1)2^{n-j+1}3^{j-1} - 1$,

$$\begin{aligned} 3(c_{n,j}^{(a)}) + 1 &= 3((a+1)2^{n-j+1}3^{j-1} - 1) + 1 \\ &= (a+1)2^{n-j+1}3^j - 3 + 1 \\ &= 2((a+1)2^{n-j}3^j - 1) = 2c_{n,j+1}^{(a)}. \end{aligned}$$

□

Proposición 2 (El enlace es Collatz). *Sea $C(x) = (3x+1)/2^{\nu_2(3x+1)}$ el mapa acelerado de Collatz sobre los impares [3]. Si el impar m ocupa la celda $c_{n,j}^{(a)}$, entonces $j \leq n$ y*

$$\Lambda(f_n^{(a)}) = C^{(n+1-j)}(m).$$

Por consiguiente, iterar Λ equivale a recorrer una órbita de C , y la órbita de m alcanza 1 si y sólo si la sucesión de enlaces iniciada en $f_n^{(a)}$ alcanza $f_1^{(0)}$.

Demostración. Si m es impar, $\alpha = \nu_2(m+1) \geq 1$, luego por (1) $n = \alpha + \beta \geq \beta + 1 = j$.

Sea $1 \leq j \leq n$. Por el Lema 1, $3(c_{n,j}^{(a)}) + 1 = 2c_{n,j+1}^{(a)}$. Si además $j+1 \leq n$, la celda $c_{n,j+1}^{(a)} = (a+1)2^{n-j}3^j - 1$ es impar, de donde $\nu_2(3m+1) = 1$ y $C(m) = c_{n,j+1}^{(a)}$: el mapa avanza una columna dentro de la fila. Si en cambio $j = n$, entonces $3m+1 = 2L_n^{(a)}$ y

$$C(m) = \frac{2L_n^{(a)}}{2^{\nu_2(2L_n^{(a)})}} = \frac{L_n^{(a)}}{2^{\nu_2(L_n^{(a)})}} = \Lambda(f_n^{(a)}).$$

Encadenando desde la columna j hasta la n se dan $n-j$ pasos de avance y uno final de salida, en total $n+1-j$ aplicaciones de C . La equivalencia orbital se sigue de que Λ es una composición de pasos de C , y de que $f_1^{(0)}$ es la fila que contiene la celda 1, correspondiente al ciclo trivial. □

Definición 2 (Padre de enlace). Una fila $f \in \mathcal{F}$ es un *padre* del impar M si $\Lambda(f) = M$. El conjunto de padres de M se denota $\Pi(M)$.

Obsérvese la distinción, que se mantendrá en todo el texto: $\Pi(M)$ es el conjunto de padres de un *valor*, mientras que la preimagen $\Lambda^{-1}(f_{n'}^{(b)})$ de un *nodo* del grafo es la unión de los $\Pi(M)$ sobre los impares M que ocupan alguna celda de esa fila, esto es, sobre las celdas $c_{n',j}^{(b)}$ con $j \leq n'$.

2. Parametrización exacta de los padres

El resultado central de este trabajo es que $\Pi(M)$ admite una descripción cerrada por un solo parámetro entero. La altura de la fila padre no es libre: queda forzada por la exigencia de primitividad.

Teorema 1 (Parametrización de los predecesores). *Sea $M \geq 1$ impar. Para cada $r \geq 1$ defínanse*

$$n_M(r) = \nu_3(2^r M + 1), \quad g_M(r) = \frac{2^r M + 1}{3^{n_M(r)}}, \quad a_M(r) = g_M(r) - 1.$$

Entonces $\gcd(g_M(r), 6) = 1$, y la fila

$$P_r(M) := f_{n_M(r)}^{(a_M(r))}$$

pertenece a $\mathcal{F}$ y verifica

$$L(P_r(M)) = 2^r M, \quad \Lambda(P_r(M)) = M.$$

Además la aplicación $r \mapsto P_r(M)$ es una biyección de $\mathbb{N}_{\geq 1}$ sobre $\Pi(M)$.

Demostración. Buena definición. Por construcción $2^r M + 1 = g_M(r) 3^{n_M(r)}$. Como $r \geq 1$ y M es impar, $2^r M + 1$ es impar, luego $g_M(r)$ es impar; y por la maximalidad de $n_M(r) = \nu_3(2^r M + 1)$, $g_M(r)$ no es divisible por 3. Así $\gcd(g_M(r), 6) = 1$ y $a_M(r) = g_M(r) - 1$ es una semilla primitiva. El cierre de la fila indicada es

$$L(P_r(M)) = g_M(r) 3^{n_M(r)} - 1 = 2^r M,$$

y como M es impar, $\nu_2(2^r M) = r$, de donde $\Lambda(P_r(M)) = 2^r M / 2^r = M$. Finalmente $P_r(M) \neq f_0^{(0)}$: esa fila tendría cierre 0, mientras que $2^r M \geq 2$.

Sobreyectividad. Sea $f_n^{(a)} \in \Pi(M)$ y $r = \nu_2(L_n^{(a)})$. De $\Lambda(f_n^{(a)}) = M$ se sigue $L_n^{(a)} = 2^r M$ con $r \geq 1$, es decir

$$(a + 1) 3^n = 2^r M + 1.$$

Como $\gcd(a + 1, 3) = 1$, la unicidad de la factorización obliga a $n = \nu_3(2^r M + 1) = n_M(r)$ y $a + 1 = g_M(r)$. Luego $f_n^{(a)} = P_r(M)$.

Inyectividad. Si $P_r(M) = P_{r'}(M)$, ambas filas tienen el mismo cierre, luego $2^r M = 2^{r'} M$ y $r = r'$. $\square$

Corolario 1 (Grado de entrada). *Todo impar M tiene una infinidad numerable de padres. En el grafo de enlaces, toda fila $f_{n'}^{(b)}$ con $n' \geq 1$ tiene grado de entrada infinito, mientras que toda fila semilla $f_0^{(b)}$ tiene grado de entrada 0: las semillas son las fuentes del grafo.*

Demostración. Lo primero es el Teorema 1. Para lo segundo, si $n' \geq 1$ la fila $f_{n'}^{(b)}$ contiene la celda impar $c_{n',1}^{(b)}$, y la preimagen del nodo contiene los infinitos padres de ese impar. Para lo tercero, un enlace es siempre impar; si M es impar entonces $M + 1$ es par, luego $\alpha = \nu_2(M + 1) \geq 1$ y la fila destino $f_{\alpha+\beta}^{(b)}$ tiene índice $\alpha + \beta \geq 1$. Ningún enlace cae, pues, en una fila semilla. $\square$

Observación 1 (Lo que el Corolario 1 no dice). La abundancia de padres no aporta nada a la terminación de las trayectorias. Un grafo funcional puede tener grado de entrada infinito en todos sus nodos y contener, sin embargo, ciclos no triviales o rayos directos infinitos. La descripción inversa es información estructural, no dinámica.

Observación 2 (Por qué no se habla aquí de un árbol). La relación inversa descrita no es, en general, la de un árbol, y conviene no nombrarla así. El grafo de enlaces es funcional —grado de salida 1—, y el grafo inverso de un grafo funcional es un árbol enraizado *sólo* si el grafo carece de ciclos no triviales y de rayos directos infinitos. Sobre el componente inverso de la raíz,

$$\mathcal{B}_0 = \bigcup_{r \geq 0} \Lambda^{-r}(f_1^{(0)}),$$

sí lo es: todo nodo de $\mathcal{B}_0$ alcanza $f_1^{(0)}$ en un número finito de pasos, luego no puede pertenecer a un ciclo, y $\mathcal{B}_0$ es un árbol entrante enraizado en el punto fijo —salvo el bucle $f_1^{(0)} \rightarrow f_1^{(0)}$ —. Pero afirmar que $\mathcal{B}_0 = \mathcal{F}$, esto es, que el grafo inverso completo sea un único árbol enraizado, es *exactamente* la conjetura de Collatz: un ciclo no trivial produciría un componente en forma de ρ —un ciclo con árboles entrantes adheridos—, y un rayo directo infinito, un componente sin raíz alguna. Por eso el Teorema 1 se enuncia sobre $\Pi(M)$, el conjunto de padres de un *valor*, y no sobre ninguna estructura global.

3. El caso degenerado: enlaces divisibles por tres

La distribución de las alturas $n_M(r)$ que se establece en §4 depende de que M sea invertible módulo 3. Conviene por tanto saber exactamente cuándo un enlace es múltiplo de 3. La respuesta es limpia y el caso es genuino: no puede darse por supuesto que no ocurra.

Lema 2 (Enlaces múltiplos de 3). *Sea $f_n^{(a)} \in \mathcal{F}$. Entonces*

$$3 \mid \Lambda(f_n^{(a)}) \iff n = 0 \text{ y } a \equiv 0 \pmod{6}.$$

Demostración. Si $n \geq 1$, entonces $L_n^{(a)} = (a+1)3^n - 1 \equiv -1 \pmod{3}$, luego $3 \nmid L_n^{(a)}$ y, dividiendo por una potencia de 2, tampoco $3 \mid \Lambda(f_n^{(a)})$.

Si $n = 0$, el cierre es $L_0^{(a)} = a$ y el enlace es $a/2^{\nu_2(a)}$, que es divisible por 3 si y sólo si lo es a . Como $a \equiv 0, 4 \pmod{6}$ por primitividad, esto ocurre exactamente cuando $a \equiv 0 \pmod{6}$. $\square$

Ejemplo 1. Los enlaces de las filas semilla de $T(6)$, $T(18)$ y $T(54)$ son 3, 9 y 27 respectivamente. Este último tiene interés particular: 27 es un enlace, y es múltiplo de 3.

Proposición 3 (Padres en el caso degenerado). *Si $3 \mid M$, entonces $n_M(r) = 0$ para todo $r \geq 1$, y*

$$\Pi(M) = \{ f_0^{(2^r M)} : r \geq 1 \} :$$

todos los padres de M son filas semilla, con semillas en progresión geométrica de razón 2.

Demostración. Si $3 \mid M$ entonces $2^r M + 1 \equiv 1 \pmod{3}$, luego $n_M(r) = 0$ y $g_M(r) = 2^r M + 1$, es decir $a_M(r) = 2^r M$. Basta aplicar el Teorema 1. Obsérvese que $2^r M \equiv 0 \pmod{6}$, coherente con el Lema 2. $\square$

4. Ley de alturas

Fijado M , el Teorema 1 reduce la descripción de $\Pi(M)$ a la sucesión de alturas $n_M(1), n_M(2), n_M(3), \dots$, que determina en qué nivel de qué triángulo cae cada padre. Esa sucesión admite una descripción completa.

Teorema 2 (Alturas de los padres). *Sea M impar con $\gcd(M, 3) = 1$. Para cada $k \geq 1$ existe un único $r_k = r_k(M)$ módulo $2 \cdot 3^{k-1}$ tal que*

$$n_M(r) \geq k \iff r \equiv r_k \pmod{2 \cdot 3^{k-1}}.$$

En consecuencia el conjunto $\{r \geq 1 : n_M(r) \geq k\}$ tiene densidad natural $1/(2 \cdot 3^{k-1})$, y las alturas se distribuyen según

$$\delta\{r : n_M(r) = 0\} = \frac{1}{2}, \quad \delta\{r : n_M(r) = k\} = \frac{1}{3^k} \quad (k \geq 1).$$

La forma de esta distribución no depende de M : solo dependen de M los desplazamientos $r_k(M)$ de las clases de residuos.

Demostración. Para $k \geq 1$,

$$n_M(r) \geq k \iff 3^k \mid 2^r M + 1 \iff 2^r \equiv -M^{-1} \pmod{3^k},$$

donde M^{-1} existe por ser $\gcd(M, 3) = 1$. El grupo $(\mathbb{Z}/3^k\mathbb{Z})^\times$ es cíclico de orden $\varphi(3^k) = 2 \cdot 3^{k-1}$ y 2 es una raíz primitiva módulo 3^k para todo $k \geq 1$ [2]. Luego $r \mapsto 2^r$ recorre todo el grupo con periodo exactamente $2 \cdot 3^{k-1}$, y la ecuación anterior tiene solución, única módulo ese periodo. Una clase de residuos módulo $2 \cdot 3^{k-1}$ tiene densidad natural $1/(2 \cdot 3^{k-1})$.

Para las densidades exactas, obsérvese que $\{n_M \geq k+1\} \subseteq \{n_M \geq k\}$, de modo que

$$\delta\{n_M = k\} = \frac{1}{2 \cdot 3^{k-1}} - \frac{1}{2 \cdot 3^k} = \frac{1}{2 \cdot 3^k} (3 - 1) = \frac{1}{3^k} \quad (k \geq 1),$$

y $\delta\{n_M = 0\} = 1 - \delta\{n_M \geq 1\} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. La normalización se comprueba: $\frac{1}{2} + \sum_{k \geq 1} 3^{-k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. $\square$

Corolario 2 (Dicotomía). *Para todo impar M se da exactamente uno de los dos comportamientos siguientes:*

- si $\gcd(M, 3) = 1$, las alturas de los padres se reparten con densidades $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots, 3^{-k}, \dots$, y en particular hay infinitos padres en cada nivel $k \geq 0$;
- si $3 \mid M$, todos los padres son semillas (Proposición 3).

El Lema 2 decide el caso: el segundo se presenta exactamente cuando M es el enlace de una fila semilla de un triángulo con $a \equiv 0 \pmod{6}$.

Observación 3 (Lectura triangular). La mitad de los padres de un enlace genérico son semillas —filas de una sola celda—, un tercio son filas de dos celdas, un noveno de tres, y así sucesivamente. El conjunto $\Pi(M)$ es inmensamente ancho, pero se concentra abrumadoramente en filas cortas: la altura media de un padre es

$$\sum_{k \geq 1} k 3^{-k} = \frac{3}{4},$$

finita y menor que 1. Es la imagen inversa de un hecho conocido: remontar la dinámica de Collatz es barato en potencias de 3 y caro en potencias de 2.

4.1. Ejemplos

Ejemplo 2 (Los padres de $M = 1$).

r	$2^r + 1$	$n_1(r)$	$g_1(r)$	fila padre
1	3	1	1	$f_1^{(0)}$
2	5	0	5	$f_0^{(4)}$
3	9	2	1	$f_2^{(0)}$
4	17	0	17	$f_0^{(16)}$
5	33	1	11	$f_1^{(10)}$
6	65	0	65	$f_0^{(64)}$
7	129	1	43	$f_1^{(42)}$
8	257	0	257	$f_0^{(256)}$

Los cierres son 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256: las potencias de 2, repartidas entre triángulos y niveles distintos según la factorización de $2^r + 1$. El primer padre, $f_1^{(0)}$, es el punto fijo.

Ejemplo 3 (Los padres de $M = 577$).

r	$2^r \cdot 577 + 1$	$n_{577}(r)$	$g_{577}(r)$	fila padre
1	1155	1	385	$f_1^{(384)}$
2	2309	0	2309	$f_0^{(2308)}$
3	4617	5	19	$f_5^{(18)}$
4	9233	0	9233	$f_0^{(9232)}$
5	18465	1	6155	$f_1^{(6154)}$
6	36929	0	36929	$f_0^{(36928)}$

El valor $r = 3$ recupera la fila $f_5^{(18)}$, cuyo cierre 4616 = $2^3 \cdot 577$ y cuyo enlace 577 ya aparecían en [1]. Nótese la irregularidad de las alturas: una fila de nivel 5 aparece entre padres de nivel 0 y 1.

Ejemplo 4 (El caso degenerado $M = 27$). Como $3 \mid 27$, la Proposición 3 da

$$\Pi(27) = \{f_0^{(54)}, f_0^{(108)}, f_0^{(216)}, f_0^{(432)}, f_0^{(864)}, f_0^{(1728)}, \dots\},$$

con cierres 54, 108, 216, 432, ... Todas las alturas valen 0 y la ley del Teorema 2 no se aplica. El contraste con el Ejemplo 3 muestra que la hipótesis $\gcd(M, 3) = 1$ no es técnica ni prescindible.

5. Cargas de los cierres

La *carga* de una fila es $\nu_2(L_n^{(a)})$: el exponente que el enlace consume. Por el Teorema 1 es también el parámetro r que indexa a la fila como padre de su propio enlace. Su distribución dentro de un triángulo está en buena parte determinada por la clase de la semilla.

Proposición 4 (La mitad de las filas tienen carga 1). *Sea $T(a)$ primitivo. Entonces*

$$\nu_2(L_n^{(a)}) = 1 \iff n \not\equiv \frac{a}{2} \pmod{2},$$

y en ese caso $\Lambda(f_n^{(a)}) = L_n^{(a)}/2$.

Demostración. Como $3 \equiv -1 \pmod{4}$, se tiene $3^n \equiv (-1)^n \pmod{4}$, luego $(a+1)3^n \equiv (a+1)(-1)^n \pmod{4}$. Ahora bien, $\nu_2(L_n^{(a)}) = 1$ equivale a $L_n^{(a)} \equiv 2 \pmod{4}$, esto es a $(a+1)(-1)^n \equiv 3 \pmod{4}$. Si $a \equiv 0 \pmod{4}$ entonces $a+1 \equiv 1$ y la condición pide n impar, mientras que $a/2$ es par; si $a \equiv 2 \pmod{4}$ entonces $a+1 \equiv 3$ y la condición pide n par, mientras que $a/2$ es impar. En ambos casos la condición equivale a $n \not\equiv a/2 \pmod{2}$. Siendo entonces $L_n^{(a)}/2$ impar, el enlace es exactamente ese cociente. $\square$

Proposición 5 (Cargas acotadas en dos clases). *Si $a \equiv 4, 6 \pmod{8}$, entonces para todo $n \geq 0$*

$$\nu_2(L_n^{(a)}) = \begin{cases} 1, & n \not\equiv a/2 \pmod{2}, \\ 2, & n \equiv a/2 \pmod{2}. \end{cases}$$

En particular las cargas de esos triángulos están acotadas por 2, y el enlace de cada fila es $L_n^{(a)}/2$ o $L_n^{(a)}/4$ según el caso.

Demostración. El caso $n \not\equiv a/2$ es la Proposición 4. Sea pues $n \equiv a/2$, es decir $n = 2k + \pi$. Aquí $a+1 \equiv 5$ o $7 \pmod{8}$, y como $3^n \equiv 1$ o $3 \pmod{8}$, el producto $(a+1)3^n$ recorre módulo 8 el conjunto $\{5, 7\}$ y nunca el valor 1. Por la Proposición 4 y su prueba, la paridad $n \equiv a/2$ es justamente la que da $(a+1)3^n \equiv 1 \pmod{4}$, lo que entre los residuos $\{5, 7\}$ selecciona el 5. Luego $(a+1)3^n \equiv 5 \pmod{8}$ y $L_n^{(a)} \equiv 4 \pmod{8}$, esto es $\nu_2(L_n^{(a)}) = 2$ exactamente. $\square$

Corolario 3 (Localización de la irregularidad). *Si $\nu_2(L_n^{(a)}) \geq 3$ para algún n , entonces $a \equiv 0, 2 \pmod{8}$. Toda la variabilidad no acotada de las cargas —y con ella la existencia de filas-pozo, aquellas cuyo cierre absorbe más factores 2 de los que la clase de a garantiza [1]— queda confinada a esas dos clases.*

Observación 4 (Alcance del Corolario 3). El confinamiento es de las *cargas*, no de las trayectorias. Una órbita atraviesa triángulos de las cuatro clases módulo 8 sin restricción, de modo que el Corolario 3 no acota ν_2 a lo largo de una trayectoria: solo indica en qué mitad de la familia puede nacer un salto grande.

Observación 5 (Lectura en términos de reductores). En el lenguaje de [1], donde el *primer reductor* de la fila n es $F_n^{(a)} = L_n^{(a)}/2$ y los *segundos reductores* son $S_k^{(a)} = L_{2k+\pi}^{(a)}/2^d$ con $d = 3$ si $a \equiv 0, 2 \pmod{8}$, $d = 2$ si $a \equiv 4, 6 \pmod{8}$ y $\pi \equiv a/2 \pmod{2}$, las dos proposiciones anteriores dicen que la mitad de las filas de todo triángulo tienen por enlace su primer reductor, y que en las clases $a \equiv 4, 6 \pmod{8}$ la otra mitad tiene por enlace su segundo reductor: todos los enlaces de esos triángulos son reductores del propio triángulo. Esta lectura es una traducción terminológica y no interviene en las demostraciones, que son enteramente en términos de ν_2 .

6. Una advertencia sobre potenciales

Una función de rango bien fundada que decreciera en cada enlace probaría la conjetura de Collatz, y es tentador buscarla entre las combinaciones de los cuatro parámetros naturales del enlace: el genoma $a+1$, la altura n , la carga $r = \nu_2(L)$ y la valuación de entrada $\alpha = \nu_2(M+1)$. Esa reducción de la conjetura a la existencia de un rango se formuló ya en [1]. Conviene registrar aquí por qué la familia lineal más obvia no puede funcionar.

Llámesese *tamaño* de la fila a

$$\Sigma(f_n^{(a)}) := L_n^{(a)} + 1 = (a+1)3^n,$$

de modo que $\log \Sigma = \log(a+1) + n \log 3$ agota las combinaciones lineales de las dos primeras variables.

Proposición 6 (Ley exacta de tamaños). *Sea $f \in \mathcal{F}$ con $\Sigma = \Sigma(f)$, carga $r = \nu_2(\Sigma - 1)$ y enlace $M = (\Sigma - 1)/2^r$. Sea $\alpha = \nu_2(M + 1)$. Entonces*

$$\Sigma(\Lambda(f)) = (M + 1) \left(\frac{3}{2}\right)^\alpha, \quad \log \frac{\Sigma(\Lambda(f))}{\Sigma(f)} = \log \frac{(M + 1) (3/2)^\alpha}{2^r M + 1}.$$

En particular

$$\log \Sigma(\Lambda(f)) - \log \Sigma(f) = -r \log 2 + \alpha \log \frac{3}{2} + O(M^{-1}).$$

Demostración. Sea $M + 1 = 2^\alpha 3^\beta (b + 1)$ con $\gcd(b + 1, 6) = 1$; por (1) la fila destino es $f_{\alpha+\beta}^{(b)}$, cuyo tamaño es

$$(b + 1) 3^{\alpha+\beta} = \frac{M + 1}{2^\alpha 3^\beta} \cdot 3^{\alpha+\beta} = (M + 1) \left(\frac{3}{2}\right)^\alpha.$$

La segunda igualdad es sustituir $\Sigma = 2^r M + 1$. Para la tercera, se escribe

$$\log \frac{(M + 1) (3/2)^\alpha}{2^r M + 1} = -r \log 2 + \alpha \log \frac{3}{2} + \log \frac{M + 1}{M} - \log \frac{2^r M + 1}{2^r M},$$

y ambos correctores son $O(M^{-1})$, uniformemente en $r \geq 1$. $\square$

Observación 6 (Consecuencia metodológica). La Proposición 6 muestra que la variación de $\log \Sigma$ bajo el enlace no es un grado de libertad, sino una cantidad determinada: el descenso se produce si y sólo si

$$r \log 2 > \alpha \log \frac{3}{2} + O(M^{-1}), \quad \text{esto es, aproximadamente } r > 0,585 \alpha.$$

Por tanto, todo potencial de la forma $A \log(a+1) + Bn$ reexpresa la competencia clásica entre la reducción por 2^r y la reexpansión por $(3/2)^\alpha$ que produce la reubicación del enlace en su fila destino. Añadir términos $-Cr + D\alpha$ no altera el problema: la dificultad no es la forma del potencial, sino que $\alpha = \nu_2(M + 1)$ no está acotado ni controlado a lo largo de una trayectoria.

Un ejemplo basta. La fila de 27 es $f_2^{(6)}$, con $\Sigma = 63$ y $r = 1$; su enlace es $M = 31$, con $M + 1 = 32$ y $\alpha = 5$, de donde

$$\Sigma' = 32 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5 = 243,$$

un ascenso de 63 a 243 en un solo enlace. No se afirma aquí que ningún potencial compuesto pueda funcionar; sólo que esta familia elemental no neutraliza el término α .

Dicho de otro modo, la Proposición 6 traduce la conjetura en el control de la sucesión de pares (r_t, α_t) que una trayectoria de enlaces produce: el tamaño decrece a lo largo del tramo $t = 0, \dots, T$ cuando la suma

$$\sum_{t=0}^T \left(\alpha_t \log \frac{3}{2} - r_t \log 2 \right)$$

es suficientemente negativa. La traducción es cualitativa y no una identidad: los correctores $O(M_t^{-1})$ dejan de ser despreciables al final de la órbita, donde M_t es pequeño. Lo que este trabajo aporta a esa lectura es la descripción de r_t —acotado o no según la clase de la semilla, por el Corolario 3—, mientras que α_t sigue sin control alguno.

Corolario 4 (El descenso desde las clases de carga acotada). Sea $f = f_n^{(a)}$ con $a \equiv 4, 6$ (mód 8), y sean $r = \nu_2(L_n^{(a)})$, $M = \Lambda(f)$ y $\alpha = \nu_2(M + 1)$. Entonces $\Sigma(\Lambda(f)) < \Sigma(f)$ si y sólo si

$$r = 1 \text{ y } \alpha = 1, \quad \text{o bien} \quad r = 2 \text{ y } \alpha \leq 3.$$

En cualquier otro caso el enlace hace crecer el tamaño. En particular el descenso por enlace desde una de estas filas nunca supera el factor $2^r \leq 4$.

Demostración. Por la Proposición 5, $r \in \{1, 2\}$. Por la Proposición 6, $\Sigma' < \Sigma$ equivale a $(M + 1)3^\alpha < 2^\alpha(2^r M + 1)$, desigualdad que se comprueba directamente en cada caso. Para $r = 1$: con $\alpha = 1$ queda $3M + 3 < 4M + 2$, cierto para $M > 1$, y $M \geq 3$ aquí porque $L_n^{(a)} \geq 4$; con $\alpha = 2$ queda $9M + 9 < 8M + 4$, falso siempre, y para $\alpha \geq 3$ el lado izquierdo solo crece. Para $r = 2$: con $\alpha \leq 3$ las desigualdades son $3M + 3 < 8M + 2$, $9M + 9 < 16M + 4$ y $27M + 27 < 32M + 8$, ciertas para $M \geq 1$, $M \geq 1$ y $M \geq 4$ respectivamente, y $\alpha = 3$ obliga a $M \equiv 7$ (mód 8), luego $M \geq 7$; con $\alpha \geq 4$ queda $81M + 81 < 64M + 16$, falso. Para la última afirmación,

$$\frac{\Sigma}{\Sigma'} = \frac{2^r M + 1}{M + 1} \left(\frac{2}{3}\right)^\alpha \leq 2^r \cdot \frac{2}{3} < 4,$$

donde se ha usado $2^r M + 1 \leq 2^r(M + 1)$, $\alpha \geq 1$ y $r \leq 2$. □

Observación 7 (Una inversión de la intuición). El Corolario 3 confina la irregularidad de las cargas a las clases $a \equiv 0, 2$ (mód 8). Podría leerse esto como que las otras dos clases son las *dóciles*, y buscar en ellas la sección recurrente del Problema 1. El Corolario 4 dice lo contrario: carga acotada significa *descenso acotado*. Desde una fila con $a \equiv 4, 6$ (8) el tamaño se divide a lo sumo por 4, mientras que α puede ser arbitrariamente grande y hacerlo crecer sin cota. Todo descenso apreciable ha de nacer, pues, en las clases irregulares, que son justamente aquellas sobre las que no se tiene descripción.

A título ilustrativo —una órbita no es un teorema—, en la trayectoria de 27 la aportación media $\alpha_t \log \frac{3}{2} - r_t \log 2$ por enlace es +0,52 en los pasos que salen de triángulos con $a \equiv 4, 6$ (8) y -1,07 en los que salen de $a \equiv 0, 2$ (8); la aportación total, -3,88, procede íntegramente de estos últimos.

Conviene precisar el alcance de todo ello, porque invita a una extrapolación falsa. La cota del Corolario 4 es *por enlace* y no se acumula: nada impide encadenar muchos pasos regulares consecutivos, cada uno dividiendo el tamaño por hasta 8/3, y obtener así un descenso grande sin abandonar las clases dóciles. Sucede de hecho: la trayectoria que arranca en 269119 recorre once enlaces consecutivos desde triángulos con $a \equiv 4, 6$ (8) y reduce el tamaño en un factor superior a 265. No es cierto, pues, que todo descenso apreciable de una órbita deba pasar por las clases irregulares; lo único demostrado es que ningún *paso* desde una fila dócil desciende más de un factor 4.

7. Límites

Los resultados de este trabajo son estáticos, en el mismo sentido en que lo era la cobertura de $\mathbb{N}_0$ en [1]. Conviene decir con precisión qué no se ha probado.

- No se ha probado que el componente inverso de $f_1^{(0)}$, $\mathcal{B}_0 = \bigcup_{r \geq 0} \Lambda^{-r}(f_1^{(0)})$, sea todo $\mathcal{F}$. La descripción de Λ^{-1} es exhaustiva, pero enumerar los padres de un nodo no dice nada sobre qué nodos son alcanzables desde él hacia atrás en un número finito de pasos.

- No se excluyen ciclos no triviales. El Teorema 1 es compatible con la existencia de un ciclo con árboles inversos infinitos adheridos.
- No se excluyen rayos directos infinitos, que es la otra mitad de la conjetura.
- El problema dinámico que resta es el control de $\alpha = \nu_2(M + 1)$ —equivalentemente, de la carga r de la fila siguiente— a lo largo de una trayectoria de enlaces, que es el mismo obstáculo que en la formulación clásica.

Problema 1. Exhibir un subconjunto $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$ tal que toda trayectoria de enlaces lo alcance, y una función $\rho : \mathcal{S} \rightarrow W$ con W bien ordenado que decrezca bajo el primer retorno a $\mathcal{S}$. Las Propositiones 4 y 5 proporcionan subconjuntos con descripción cerrada, pero el Corolario 4 desaconseja tomarlos como $\mathcal{S}$: son exactamente las filas donde el descenso está acotado. La sección útil habría de vivir en las clases $a \equiv 0, 2 \pmod{8}$, que son las que carecen de descripción. Y probar que una sección cualquiera es recurrente para *toda* trayectoria es, por sí solo, un problema abierto.

La contribución aquí es haber pasado de la mera existencia de enlaces a una descripción exacta de sus predecesores, de la distribución de sus alturas y de la localización modular de la irregularidad de las cargas. Grado de entrada infinito, ley exacta de alturas y control parcial de cargas no implican, ni conjuntamente ni por separado, la terminación global de las órbitas de Collatz.

Referencias

- [1] M. Cerdá Bennassar, *La representación triangular canónica de las órbitas de Collatz*, 2026.
- [2] K. Ireland y M. Rosen, *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, 2.^a ed., Graduate Texts in Mathematics **84**, Springer, 1990.
- [3] R. Terras, *A stopping time problem on the positive integers*, Acta Arithmetica **30** (1976), 241–252.
- [4] J. C. Lagarias (ed.), *The Ultimate Challenge: The $3x+1$ Problem*, American Mathematical Society, 2010.