

Extracción de raíces cúbicas enteras mediante congruencias

Reconstrucción y desarrollo de una nota de 2014

Miguel Cerdá Bennassar

Octubre de 2026

Resumen

En unas notas anteriores se proponía recuperar un entero $n \geq 0$ a partir de su cubo $N = n^3$ mediante la fórmula

$$n = N - 12 \left\lfloor \frac{N}{12} \right\rfloor + m,$$

donde la corrección m es un múltiplo de 6 que quedaba por determinar. Completado con una búsqueda ordenada, el método exige elevar al cubo del orden de $2 \log_2(n/6)$ candidatos. En este trabajo se presenta una versión simplificada. La magnitud de n se lee en las primeras cifras de N , y su resto módulo un número M adecuado se obtiene de restos de N . Así queda un único candidato, que se comprueba con un solo cubo. La corrección m deja de ser una incógnita y se obtiene al final con una resta.

Índice

Origen de la idea: la nota de 2014	2
1. Planteamiento y notación	2
2. Resultados auxiliares	2
3. El método optimizado	4
4. Un filtro rápido basado en las columnas de nueve y tres valores	6
5. Ejemplos	10
6. Comparación con el procedimiento anterior	11
7. Alcance y limitaciones	12
A. Reconstrucción del material original	14
B. Imágenes originales de las notas	18

Origen de la idea: la nota de 2014

La nota inicial de la que parte este trabajo es de 2014, anterior al comienzo de las investigaciones del autor sobre la conjetura de Collatz en 2015. La recuperación y el estudio de aquella nota en 2026 han permitido recordar el objetivo que motivó los cálculos: obtener n conociendo n^3 .

Para conservar esa procedencia, el apéndice A reúne las fórmulas, el ejemplo numérico y varias tablas reconstruidos a partir de las notas. Se distinguen expresamente el material histórico, las aclaraciones de notación y las correcciones editoriales actuales. Las demostraciones generales, la búsqueda ordenada y las optimizaciones de este artículo son desarrollos posteriores: no se atribuyen a la nota de 2014.

El apéndice A contiene una reconstrucción tipográfica selectiva, no una reproducción fotográfica ni una transcripción diplomática del manuscrito. El apéndice B está organizado en dos apartados para reproducir, por separado, la primera nota y el documento «Intentos para calcular n , conociendo n^3 ».

1. Planteamiento y notación

En todo el documento, N es un entero no negativo conocido y buscamos un entero $n \geq 0$ tal que $n^3 = N$, o la conclusión de que no existe. Para evitar la ambigüedad de las notas originales, donde la letra m tenía tres significados distintos, fijamos la notación siguiente.

Símbolo	Significado
N	número conocido (el cubo)
n	raíz cúbica entera buscada
r	resto N mód 12, es decir, $N - 12\lfloor N/12 \rfloor$
m	corrección: $m = n - r$
D	número de cifras decimales de N
g	número de cifras decimales de n

Con esta notación, la fórmula de las notas es simplemente

$$n = r + m. \tag{1}$$

La dificultad original era elegir m sin conocer n . La idea de este trabajo es invertir el orden: calcular primero n sin pasar por m y obtener después $m = n - r$.

2. Resultados auxiliares

2.1. Filtros de descarte

Proposición 1. *Si N es un cubo perfecto, entonces*

$$N \bmod 12 \in \{0, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11\}, \quad N \bmod 9 \in \{0, 1, 8\}, \quad N \bmod 7 \in \{0, 1, 6\}.$$

Demostración. El resto de n^3 módulo k depende solo del resto de n módulo k . Basta, por tanto, elevar al cubo los restos $0, 1, \dots, k-1$ para $k = 12, 9, 7$ y anotar los resultados. $\square$

Observación 2. Un número que no cumpla alguna de estas condiciones no es un cubo y puede descartarse sin más cálculos. Entre los enteros menores que 10^6 , los tres filtros juntos descartan aproximadamente el 89 %. A mano, el resto módulo 9 se obtiene sumando las cifras de N .

2.2. Número de cifras y primera cifra de la raíz

Lema 3. Sea $N = n^3$ con $n \geq 1$. Si N tiene D cifras, entonces n tiene

$$g = \left\lceil \frac{D}{3} \right\rceil$$

cifras.

Demostración. Si n tiene g cifras, entonces $10^{g-1} \leq n < 10^g$. Elevando al cubo, $10^{3g-3} \leq N < 10^{3g}$, de modo que N tiene $D \in \{3g-2, 3g-1, 3g\}$ cifras. El único entero g compatible con esos valores es $\lceil D/3 \rceil$. $\square$

Definición 4. Separando las cifras de N de tres en tres desde la derecha, llamamos *grupo inicial* al número

$$G = \left\lfloor \frac{N}{10^{3(g-1)}} \right\rfloor,$$

formado por las $D - 3(g-1)$ primeras cifras de N . Se cumple $1 \leq G \leq 999$.

Lema 5. Sea $N = n^3$ con $n \geq 1$, y sea d el mayor entero de $\{1, \dots, 9\}$ tal que $d^3 \leq G$. Entonces

$$d \cdot 10^{g-1} \leq n < (d+1) \cdot 10^{g-1}.$$

En otras palabras, d es la primera cifra de n .

Demostración. Sea $c = \lfloor n/10^{g-1} \rfloor$ la primera cifra de n . De $c \cdot 10^{g-1} \leq n < (c+1) \cdot 10^{g-1}$, elevando al cubo y dividiendo por $10^{3(g-1)}$, resulta

$$c^3 \leq \frac{N}{10^{3(g-1)}} < (c+1)^3.$$

Como c^3 es entero y no supera el número real central, tampoco supera su parte entera: $c^3 \leq G$. Por otro lado, G no supera ese número real, así que $G < (c+1)^3$. Por tanto, c es el mayor entero cuyo cubo no supera G , es decir, $c = d$. $\square$

Observación 6. Para $g = 2$, el lema da la decena de n a partir de $\lfloor N/1000 \rfloor$. Es exactamente el índice $x = \lfloor n/10 \rfloor$ de la tabla por bloques decimales que aparece en la primera nota (apéndice B.1).

2.3. Restos de la raíz a partir de restos del cubo

Lema 7. Sea p un primo con $\gcd(3, p-1) = 1$, es decir, $p = 3$ o $p \equiv 2 \pmod{3}$. Sea $e \geq 1$ tal que $3e \equiv 1 \pmod{p-1}$. Entonces, para todo entero n ,

$$n \equiv \left(n^3\right)^e \pmod{p}.$$

Demostración. Si $p \mid n$, ambos miembros son congruentes con 0. En caso contrario, escribimos $3e = 1 + t(p - 1)$ con $t \geq 0$, y el pequeño teorema de Fermat da

$$n^{3e} = n \cdot (n^{p-1})^t \equiv n \pmod{p}. \quad \square$$

Lema 8. Para todo entero n , se cumple $n \equiv (n^3)^3 \pmod{10}$. En consecuencia, la última cifra de $N = n^3$ determina la última cifra de n , según la tabla

última cifra de N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
última cifra de n	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9

Demostración. Módulo 2, toda potencia positiva conserva los restos 0 y 1. Módulo 5, el lema 7 se aplica con $e = 3$, porque $9 \equiv 1 \pmod{4}$. Por el teorema chino de los restos, $n^9 \equiv n \pmod{10}$. La tabla se obtiene elevando al cubo las cifras $0, \dots, 9$. $\square$

Los primos que utilizaremos, con sus exponentes, son los siguientes:

Módulo	e	Uso
10	3	última cifra (lema 8)
11	7	raíces de 3 o más cifras
17	11	raíces de 4 o más cifras
23	15	raíces de 5 o más cifras
29	19	raíces de 6 o más cifras

Para el módulo 11 conviene disponer de la tabla explícita, que se obtiene elevando al cubo los restos módulo 11:

$N \bmod 11$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n \bmod 11$	0	1	7	9	5	3	8	6	2	4	10

Como $10 \equiv -1 \pmod{11}$, el resto de N módulo 11 se calcula a mano con la suma alternada de sus cifras, empezando por la derecha.

3. El método optimizado

Sea $W = 10^{g-1}$ la longitud del intervalo del lema 5. Sean $p_1, p_2, \dots$ los primos mayores que 5 y congruentes con 2 módulo 3, ordenados de menor a mayor. Para todo $g \geq 2$ definimos

$$M_g = 10 \prod_{j=1}^{g-2} p_j,$$

con el convenio de que el producto vacío vale 1. Los primeros términos son

$$M_2 = 10, \quad M_3 = 10 \cdot 11 = 110, \quad M_4 = 110 \cdot 17 = 1870, \quad M_5 = 1870 \cdot 23 = 43\,010, \quad \dots$$

Esta definición no se detiene al final de la tabla: en la sección siguiente se demuestra que existen suficientes primos y que $M_g \geq 10^{g-1}$ para todo $g \geq 2$. La elección es suficiente, aunque no siempre mínima; en una implementación se puede parar en cuanto el producto alcance W .

3.1. Algoritmo

Paso 1. Casos triviales y filtros. Si $N = 0$, devolver $n = 0$ y $m = 0$. Si N no supera los filtros de la proposición 1, N no es un cubo.

Paso 2. Número de cifras. Contar las cifras D de N y tomar $g = \lceil D/3 \rceil$.

Paso 3. Primera cifra. Formar el grupo inicial G y tomar el mayor $d \in \{1, \dots, 9\}$ con $d^3 \leq G$. Poner $L = d \cdot 10^{g-1}$. Si $g = 1$, el candidato es $n_0 = d$; ir al paso 6.

Paso 4. Resto de la raíz. Para cada primo p_j que interviene en M_g , tomar $e_j = (2p_j - 1)/3$ y calcular $a_{p_j} = (N \bmod p_j)^{e_j} \bmod p_j$. Para el módulo 10, usar el exponente 3. Combinar estos valores, por el teorema chino de los restos, en el único a con $0 \leq a < M_g$ que tiene esos restos.

Paso 5. Candidato. Tomar

$$n_0 = L + ((a - L) \bmod M_g).$$

Si $n_0 \geq L + W$, no hay candidato en el intervalo y N no es un cubo.

Paso 6. Verificación. Si $n_0^3 = N$, la raíz es $n = n_0$. En caso contrario, N no es un cubo perfecto.

Paso 7. Corrección de las notas. Calcular $r = N \bmod 12$ y $m = n - r$.

3.2. Corrección del algoritmo

Lema 9 (Disponibilidad de módulos para cualquier número de cifras). *Hay infinitos primos congruentes con 2 módulo 3. En particular, los números M_g están definidos para todo $g \geq 2$ y satisfacen $M_g \geq 10^{g-1}$.*

Demostración. Supongamos que hubiera solo un número finito de tales primos y sea P su producto. Como 2 y 5 están entre ellos, $P \geq 10$. El entero $Q = 3P - 1 > 1$ no es divisible por 3 ni por ninguno de los primos incluidos en P . Sin embargo, como $Q \equiv 2 \pmod{3}$, su descomposición en factores primos contiene al menos un primo congruente con 2 módulo 3: si todos sus factores fueran congruentes con 1, su producto también lo sería. Ese primo no divide P , lo que contradice la lista completa supuesta.

Cada p_j es al menos 11, por lo que, para todo $g \geq 2$,

$$M_g = 10 \prod_{j=1}^{g-2} p_j \geq 10 \cdot 11^{g-2} \geq 10 \cdot 10^{g-2} = 10^{g-1}.$$

Además, $3e_j = 2p_j - 1 = 1 + 2(p_j - 1)$, así que el exponente del paso 4 satisface la congruencia exigida por el lema 7. $\square$

Proposición 10 (Unicidad en un intervalo de enteros). *Sean L, a enteros y M, W enteros positivos con $M \geq W$. En*

$$I = \{L, L + 1, \dots, L + W - 1\}$$

hay a lo sumo un entero congruente con a módulo M . Si

$$\delta = (a - L) \bmod M, \quad 0 \leq \delta < M,$$

ese entero existe si y solo si $\delta < W$, y entonces es $L + \delta$.

Demostración. Si $x, y \in I$ tienen el mismo resto módulo M , entonces $M \mid (x - y)$ y $|x - y| \leq W - 1 < M$. El único múltiplo de M de valor absoluto menor que M es 0, luego $x = y$.

Todos los enteros congruentes con a módulo M son de la forma $L + \delta + tM$, con $t \in \mathbb{Z}$. Para $t < 0$ son menores que L ; para $t > 0$ son al menos $L + M \geq L + W$. Por tanto, el único posible es $L + \delta$, que pertenece a I exactamente cuando $\delta < W$. $\square$

Teorema 11. *Si $N = n^3$ con $n \geq 0$, el algoritmo devuelve n . Si N no es un cubo perfecto, el algoritmo lo detecta.*

Demostración. El caso $N = 0$ es inmediato. Supongamos que $N = n^3$ con $n \geq 1$. Por los lemas 3 y 5, n pertenece al conjunto de W enteros consecutivos $\{L, L + 1, \dots, L + W - 1\}$. Si $g = 1$, ese conjunto es $\{d\}$ y no hay nada más que probar.

Si $g \geq 2$, los lemas 7 y 8 garantizan que $n \equiv a_p$ módulo cada uno de los módulos utilizados. Como estos son coprimos dos a dos, el teorema chino de los restos da $n \equiv a \pmod{M_g}$. El número n_0 es el menor entero $\geq L$ congruente con a módulo M_g . Como $n \geq L$ y $n \equiv a$, se tiene $n_0 \leq n$. Si fuese $n_0 < n$, la diferencia $n - n_0$ sería un múltiplo positivo de M_g y, por tanto, $n - n_0 \geq M_g \geq W$. Pero $L \leq n_0 < n \leq L + W - 1$ implica $n - n_0 \leq W - 1$, lo que es imposible. Luego $n_0 = n$ y la verificación del paso 6 se cumple.

Si N no es un cubo, ningún entero n_0 satisface $n_0^3 = N$, y el paso 6 lo detecta. $\square$

Observación 12. Solo se calcula un cubo completo de un candidato: el del paso 6. Esto no significa que las demás operaciones sean gratuitas: también se calculan restos de N , potencias modulares y una reconstrucción por el teorema chino de los restos. Si se sabe de antemano que N es un cubo perfecto, la verificación puede omitirse y el teorema garantiza igualmente que $n_0 = n$.

3.3. Relación con la tabla de correcciones

Escribiendo $n = 12q + s$ con $0 \leq s < 12$, la corrección obtenida en el paso 7 coincide con la clasificación de las notas:

$$m = \begin{cases} 12q - 6, & s = 2, \\ 12q + 6, & s \in \{6, 10\}, \\ 12q, & s \in \{0, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11\}. \end{cases}$$

La tabla de grupos de nueve y tres valores pasa así de ser un instrumento de búsqueda a ser una comprobación del resultado.

4. Un filtro rápido basado en las columnas de nueve y tres valores

4.1. Clasificación exacta de las columnas

Sea

$$S_9 = \{0, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11\}.$$

La tabla de correcciones equivale a las dos afirmaciones siguientes, siempre restringiendo las raíces a $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} m = 12q &\iff n \in m + S_9, \\ m = 12q + 6 &\iff n \in \{m, m + 4, m + 8\}. \end{aligned}$$

La equivalencia se refiere a las parejas (n, m) que cumplen $m = n - (n^3 \bmod 12)$. En la columna $m = -6$ solo sobrevive la raíz no negativa $n = 2$.

Los tres desplazamientos excepcionales de la fórmula anterior son precisamente las clases $n \equiv 2, 6, 10 \pmod{12}$, es decir, $n \equiv 2 \pmod{4}$. De ahí surge un filtro que no necesita saber de antemano la raíz.

Proposición 13 (Tipo de columna a partir de N). *Si $N = n^3$, entonces*

$m \equiv 6 \pmod{12}$	$\iff$	$n \equiv 2 \pmod{4}$	$\iff$	$N \equiv 8 \pmod{16}$.
------------------------	--------	-----------------------	--------	--------------------------

En todos los demás casos de cubos, $m \equiv 0 \pmod{12}$. En particular, una columna de tres valores se reconoce con el único cálculo $N \bmod 16$.

Demostración. La primera equivalencia se obtiene de la fórmula de m y de que $-6 \equiv 6 \pmod{12}$. Para la segunda, si $n = 2u$ con u impar, entonces $n^3 = 8u^3 \equiv 8 \pmod{16}$. Si n es múltiplo de 4, n^3 es múltiplo de 64 y su resto módulo 16 es 0; si n es impar, su cubo también lo es. Estos tres casos agotan las posibilidades. $\square$

No es un filtro suficiente para certificar que N sea un cubo. En cambio, permite descartar como no cúbico cualquier N par cuyo resto módulo 16 no sea 0 u 8; para los que pasan, restringe la corrección a una de las dos familias de columnas.

4.2. Recuperación de la clase de la raíz módulo 12

Proposición 14 (Inversión modular para las raíces pares). *Para todo entero par n se cumple*

$$n^3 \equiv 4n \pmod{48}.$$

Por tanto, si $N = n^3$ es par y $u = N \bmod 48$, entonces

$$u \in \{0, 8, 16, 24, 32, 40\}, \quad n \bmod 12 = \frac{u}{4}.$$

Demostración. Escribiendo $n = 2t$, se obtiene

$$n^3 - 4n = 8(t^3 - t) = 8t(t - 1)(t + 1).$$

El producto de tres enteros consecutivos es divisible por 6; la diferencia es, por tanto, múltiplo de 48. Como n es par, $4n$ tiene uno de los seis restos indicados, y dividir la congruencia por 4 da $N/4 \equiv n \pmod{12}$. $\square$

Para raíces impares ya se tiene $n^3 \equiv n \pmod{12}$. Así pues, sin calcular G conocemos

$s = n \bmod 12 = \begin{cases} N \bmod 12, & N \text{ impar,} \\ (N \bmod 48)/4, & N \text{ par y cúbico.} \end{cases}$
--

En la segunda línea, si $N \bmod 48$ no es uno de los seis valores admitidos, se descarta N . Toda la información relevante para las columnas pares cabe en esta tabla:

$N \bmod 48$	$r = N \bmod 12$	$s = n \bmod 12$	$m \bmod 12$	Tipo de columna
0	0	0	0	nueve valores
8	8	2	6	tres valores
16	4	4	0	nueve valores
24	0	6	6	tres valores
32	8	8	0	nueve valores
40	4	10	6	tres valores

Para un cubo par se pasa, por tanto, de la condición $n \equiv N \pmod{6}$ a una única clase módulo 12: se elimina la mitad de los candidatos de esa progresión. Para los cubos impares no se mejora la condición módulo 12 que ya se utilizaba.

4.3. Qué puede y qué no puede sustituir a G

Proposición 15 (Un filtro periódico no determina la magnitud). *Una familia fija y finita de filtros que solo utilice restos de N no determina, por sí sola, la raíz ni la corrección m entre todos los enteros no negativos.*

Demostración. Sean $q_1, \dots, q_t$ los módulos utilizados y T su mínimo común múltiplo. Para cualquier $n \geq 0$ y cualquier entero $j \geq 0$,

$$(n + jT)^3 \equiv n^3 \pmod{q_i} \quad (1 \leq i \leq t).$$

Todos esos cubos producen idénticos restos de entrada, pero sus raíces son diferentes y no están acotadas. Las correspondientes correcciones también crecen sin límite, pues $m = n - r$ con $0 \leq r \leq 11$. Por tanto, esos restos no pueden distinguirlas todas. $\square$

La conclusión no excluye una reconstrucción modular cuyo módulo aumente con g . El número de cifras proporciona una cota global, aunque no se lea el grupo inicial G . Esto permite una variante completamente explícita.

4.4. Variante sin comparaciones con el grupo inicial

Para $N > 0$, calcúlese $g = \lceil D/3 \rceil$ y póngase $W = 10^{g-1}$. Si N es un cubo, su raíz pertenece al intervalo de $9W$ enteros

$$I_g = \{W, W + 1, \dots, 10W - 1\}.$$

Obtengamos primero $s = n \bmod 12$ con la regla anterior. Construyamos después un módulo $M = 10p_1 \cdots p_t$ y el resto $a = n \bmod M$ hasta que

$$H = \text{mcm}(12, M) = 6M \geq 9W.$$

Los factores p_j son los mismos primos mayores que 5 y congruentes con 2 módulo 3. Puesto que $\text{gcd}(12, M) = 2$, los restos s y a son compatibles si y solo si tienen la misma paridad. Si no la tienen, se descarta N .

En el caso compatible, el sistema

$$A \equiv a \pmod{M}, \quad A \equiv s \pmod{12}$$

se resuelve sin una búsqueda de candidatos. Se toma

$$t_0 = \left(\frac{s-a}{2} (M/2)^{-1} \right) \text{ mód } 6, \quad A = a + Mt_0.$$

La inversa existe módulo 6: $M/2 = 5p_1 \cdots p_t$ es impar y no es divisible por 3. Como $0 \leq a < M$ y $0 \leq t_0 < 6$, se tiene $0 \leq A < H$.

El candidato final es

$$n_0 = W + ((A - W) \text{ mód } H).$$

Si $n_0 \geq 10W$, no hay candidato en I_g . En caso contrario se comprueba si $n_0^3 = N$ y, si hay igualdad, se devuelve $m = n_0 - r$.

Corolario 16 (Unicidad sin G , para cualquier $g \geq 1$). *La variante anterior recupera correctamente la raíz de todo cubo positivo y rechaza todo número que no sea cubo.*

Demostración. Los productos M pueden superar cualquier cota, por el lema sobre la disponibilidad de primos. Si $N = n^3$, entonces $n \in I_g$ y satisface todas las congruencias utilizadas. Aplicando la proposición 10 con longitud $9W$ y módulo $H \geq 9W$, hay exactamente un candidato: $n_0 = n$. La comprobación final rechaza los números no cúbicos. $\square$

g	W	M suficiente con G	M suficiente sin G	H sin G
1	1	no necesario	10	60
2	10	10	110	660
3	100	110	1870	11220
4	1000	1870	1870	11220
5	10000	43010	43010	258060

En cada columna se elige el primer producto suficiente de la sucesión

$$10, \quad 110, \quad 1870, \quad 43010, \quad \dots$$

La tabla compara módulos suficientes, no tiempos de ejecución.

Ejemplo 17 (Por qué el filtro de columnas no basta solo). Las raíces 14 y 74 tienen dos cifras y son congruentes módulo 60. Sus cubos son 2744 y 405224, respectivamente. Ambos cubos dan resto 8 módulo 48 y última cifra 4. El filtro identifica en los dos casos $s = 2$ y una columna de tres valores, pero no distingue $m = 6$ de $m = 66$. Con $M = 10$ y $H = 60$, el intervalo completo de dos cifras aún contiene los dos candidatos. Es necesario usar G o añadir información modular.

Ejemplo 18 (Reconstrucción sin G). Para $N = 39304$, el número de cifras da $g = 2$ y $I_g = \{10, \dots, 99\}$. El resto $N \text{ mód } 48 = 40$ da $s = 10$. La última cifra de N es 4 y $N \text{ mód } 11 = 1$, de modo que $n \text{ mód } 10 = 4$ y $n \text{ mód } 11 = 1$, o sea, $a = 34$ módulo $M = 110$.

La fórmula anterior da $t_0 = 0$, $A = 34$ y $H = 660$. Por tanto, $n_0 = 10 + ((34 - 10) \text{ mód } 660) = 34$. Se obtiene $34^3 = 39304$ y $m = 30$, sin formar G ni compararlo con cubos pequeños.

4.5. Balance de las dos variantes

Las tablas sí admiten un filtro rápido: $N \bmod 16$ identifica el tipo de columna, y $N \bmod 48$ recupera la clase de las raíces pares módulo 12. Ese filtro no sustituye por sí solo a la información de magnitud de G . Se puede eliminar G combinándolo con una reconstrucción modular más amplia y el intervalo dado por el número de cifras.

Para dos o tres cifras, conservar G suele exigir menos datos modulares; no se ha medido aquí una mejora de tiempo por eliminarlo. Para raíces mayores, ambas variantes pueden requerir el mismo producto de primos, como muestran los casos $g = 4, 5$. La elección práctica debe comparar el coste de las operaciones, no solamente el número de cubos completos.

4.6. Comprobaciones reproducibles de la ampliación

El programa `verificar_extension.py` disponible en `collatz.es` junto a este escrito, con semilla aleatoria fija 20261018, implementa ambas variantes con aritmética entera exacta. Las dos recuperaron las raíces de los 100001 cubos desde 0^3 hasta 100000^3 y rechazaron los 59998 valores no cúbicos $n^3 - 1, n^3 + 1$ para $2 \leq n \leq 30000$. Además, recuperaron 600 raíces adicionales: diez para cada longitud de 1 a 60 cifras.

En el mismo ensayo se verificaron las fórmulas de los filtros para todas las raíces del primer rango. El criterio general de existencia y unicidad se contrastó para todos los módulos $1 \leq M \leq 20$, todas las longitudes $1 \leq W \leq M$, todos los restos módulo M y los extremos inferiores $L = -7, 0, 11$. Estas comprobaciones son reproducibles y no sustituyen las demostraciones anteriores.

5. Ejemplos

Ejemplo 19 (Raíz de dos cifras). Sea $N = 39\,304$.

- (a) $N \bmod 12 = 4$, $N \bmod 9 = 1$ y $N \bmod 7 = 6$: supera los filtros.
- (b) $D = 5$, luego $g = 2$ y $G = 39$.
- (c) $3^3 = 27 \leq 39 < 64 = 4^3$, luego $d = 3$ y $30 \leq n \leq 39$.
- (d) La última cifra de N es 4; por el lema 8, n termina en 4.
- (e) $n_0 = 34$, y $34^3 = 39\,304$.
- (f) $m = 34 - 4 = 30$.

Se ha calculado un único cubo. Con la búsqueda de la versión anterior hacían falta siete ($k = 0, 1, 2, 4, 8, 6, 5$).

Ejemplo 20 (Raíz de tres cifras). Sea $N = 12\,812\,904$.

- (a) $D = 8$, luego $g = 3$ y $G = 12$; como $8 \leq 12 < 27$, $d = 2$ y $200 \leq n \leq 299$.
- (b) La última cifra de N es 4, luego $n \equiv 4 \pmod{10}$.
- (c) La suma alternada de las cifras es $4 - 0 + 9 - 2 + 1 - 8 + 2 - 1 = 5$, así que $N \equiv 5 \pmod{11}$ y, por la tabla, $n \equiv 3 \pmod{11}$.

- (d) Los candidatos terminados en 4 son 204, 214, $\dots$, 294. Como $204 \equiv 6 \pmod{11}$ y cada salto de 10 resta 1 módulo 11, la sucesión de restos es 6, 5, 4, 3, $\dots$. Se obtiene $n_0 = 234$.
- (e) $234^3 = 12\,812\,904$.
- (f) $N \bmod 12 = 0$, luego $m = 234$. En efecto, $234 = 12 \cdot 19 + 6$ y la tabla da $m = 12 \cdot 19 + 6$.

Ejemplo 21 (Raíz de cuatro cifras). Sea $N = 5\,168\,743\,489$.

- (a) $D = 10$, luego $g = 4$ y $G = 5$; como $1 \leq 5 < 8$, $d = 1$ y $1000 \leq n \leq 1999$.
- (b) La última cifra de N es 9, luego $n \equiv 9 \pmod{10}$.
- (c) $N \equiv 8 \pmod{11}$, luego $n \equiv 2 \pmod{11}$. Combinado con lo anterior, $n \equiv 79 \pmod{110}$.
- (d) $N \equiv 11 \pmod{17}$, luego $n \equiv 11^{11} \equiv 12 \pmod{17}$.
- (e) Entre 1069, 1179, 1289, 1399, 1509, 1619, 1729, 1839, 1949 (los números del intervalo congruentes con 79 módulo 110), el único congruente con 12 módulo 17 es $n_0 = 1729$.
- (f) $1729^3 = 5\,168\,743\,489$, y $m = 1729 - 1 = 1728$.

Ejemplo 22 (Un número que no es cubo). Sea $N = 39\,305$. Su resto módulo 12 es 5, admisible; pero la suma de sus cifras es 20, de modo que $N \equiv 2 \pmod{9}$. Por la proposición 1, N no es un cubo, y no hace falta ningún cálculo más.

6. Comparación con el procedimiento anterior

El procedimiento anterior completaba la fórmula de las notas con una búsqueda ordenada. Si N es impar, se tiene $n \equiv N \pmod{12}$; si es par, solo se utilizaba $n \equiv N \pmod{6}$. Los candidatos forman entonces la progresión $c_k = s + hk$, donde $h = 12$ o $h = 6$ según la paridad y s es el menor resto no negativo de la clase. Se elevan al cubo $c_0, c_1, c_2, c_4, c_8, \dots$, duplicando el índice hasta encontrar N o rebasarlo, y después se localiza el índice exacto por búsqueda binaria entre los dos últimos índices probados. Para $N = 39\,304$ se tiene $s = 4$ y $h = 6$, y se prueban los índices $k = 0, 1, 2, 4, 8, 6, 5$; el último da $c_5 = 34$.

La regla módulo 30 es la misma búsqueda con paso $h = 30$. Como $x \mapsto x^3$ permuta los restos módulo 2, 3 y 5, el resto $N \bmod 30$ determina $n \bmod 30$ sin distinguir casos. Una representación gráfica de esta regla, en la que el cubo conserva cada fila módulo 6 e intercambia en ella dos posiciones vecinas de un pentágono, se expone en [1].

Aspecto	Procedimiento anterior	Versión optimizada
Significado de m	Tres significados según la nota	Uno solo: $m = n - r$
Papel de m	Incógnita que hay que buscar	Resultado de una resta final
Distinción de casos	Par o impar, con pasos 12 o 6	Ninguna
Restos calculados	$N \bmod 12$ y $N \bmod 6$	Módulo 10, y módulo 11, 17, ... si $g \geq 3$
Localización del tamaño	Duplicación del índice	Lectura del grupo inicial G
Selección del candidato	Búsqueda binaria	Candidato único (teorema 11)
Cubos calculados	$\approx 2 \log_2(n/6)$	1 (verificación)
Detección de no cubos	Al agotar la búsqueda	Filtros previos y un cubo
Cálculo a mano	Laborioso a partir de dos cifras	Cómodo para dos y tres cifras

Se implementaron ambos procedimientos y se contó el número de cubos calculados para recuperar cada raíz de los rangos indicados.

Rango de n	Anterior (mod 12/6)	Regla módulo 30	Optimizada
1–99	5,33 (máx. 9)	2,31 (máx. 5)	1
100–999	12,66 (máx. 17)	8,76 (máx. 13)	1
1000–9999	19,27 (máx. 23)	15,68 (máx. 19)	1
10 000–99 999	25,79 (máx. 31)	22,28 (máx. 25)	1

En las dos columnas centrales se indica el promedio y, entre paréntesis, el máximo. La versión optimizada recuperó correctamente todas las raíces entre 1 y 99 999 y 20 000 raíces aleatorias menores que 10^7 . En esta comprobación inicial también se rechazaron los valores $n^3 - 1$ y $n^3 + 1$ para $2 \leq n < 3000$, un total de 5996 casos. Posteriormente, el ensayo reproducible descrito en el apartado 4.6 amplió esta prueba a $2 \leq n \leq 30000$, con 59998 casos rechazados por ambas variantes.

7. Alcance y limitaciones

- El coste del método no desaparece: se traslada de los cubos de números grandes a restos de N módulo primos pequeños. Para $g \geq 4$, combinar esos restos a mano es laborioso, y el método resulta más adecuado para ordenador.
- El producto M_g crece con g , de modo que para raíces de muchas cifras hacen falta cada vez más primos. Para números muy grandes, el procedimiento habitual es el método de Newton para raíces enteras; este trabajo no pretende superarlo.
- Que la última cifra de un cubo determine la de su raíz es un recurso conocido del cálculo mental. Para cubos cuya raíz tiene dos cifras, leer la decena en el grupo inicial y la unidad en la última cifra es un procedimiento clásico, y la reconstrucción de un entero a partir de sus restos es la aplicación habitual del teorema chino de los restos. Lo propio de las notas originales es la organización de la corrección m por restos módulo 12, que aquí se conserva como paso final y como comprobación.

Referencias

- [1] M. Cerdá Bennassar, *El pentágono de los cubos. Una representación reversible módulo 30*, octubre de 2026. Disponible en https://www.collatz.es/articulos/seccionE_7/Pentagono_cubos.pdf.

A. Reconstrucción del material original

A.1. Criterio de conservación

Este apéndice conserva una selección de los cálculos y estructuras de las notas. No pretende reproducir todos sus trazos, dibujos o anotaciones marginales. Las tablas se han recompuesto con tipografía actual a partir de la estructura numérica recuperada; su distribución gráfica no debe confundirse con la de las páginas originales.

La nota inicial es de 2014. No se asigna aquí una fecha independiente a cada ampliación. El título de la segunda nota expresa el objetivo de manera directa: «Intentos para calcular n , conociendo n^3 ».

Las explicaciones y observaciones que acompañan a las fórmulas son comentarios actuales. Cuando una letra cambia de significado respecto al cuerpo del artículo, se indica expresamente.

A.2. El ejemplo de 64 y las parejas de suma 128

El cálculo que dio comienzo a la recuperación de la idea es

$$64 + 6 \cdot 10 = 124, \quad 2 \cdot 64 - 124 = 4.$$

La presentación original combinaba una progresión de paso seis con complementos respecto de 128. En la notación del artículo, la operación se resume como

$$2N - (N + 6k) = N - 6k, \quad N = 64, \quad k = 10.$$

Esta última escritura es una simplificación editorial actual del cálculo, no una transcripción literal de una fórmula del manuscrito.

La estructura tabular que figura en la primera nota es la siguiente:

4	10	16	22	28	34	40	46	52	58	64
10	16	22	28	34	40	46	52	58	64	70
16	22	28	34	40	46	52	58	64	70	76
22	28	34	40	46	52	58	64	70	76	82
28	34	40	46	52	58	64	70	76	82	88
34	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94
40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100
46	52	58	64	70	76	82	88	94	100	106
52	58	64	70	76	82	88	94	100	106	112
58	64	70	76	82	88	94	100	106	112	118
64	70	76	82	88	94	100	106	112	118	124

Para describirla con índices actuales, sus entradas son

$$a_{i,j} = 4 + 6(i + j), \quad 0 \leq i, j \leq 10.$$

Las esquinas contienen 4, 64, 124, el centro es 64 y se cumple

$$a_{i,j} + a_{10-i,10-j} = 128.$$

Así se conservan las parejas $4 + 124 = 128$, $10 + 118 = 128$ y $64 + 64 = 128$ que motivaban la representación.

Diagonales: parejas dentro de cada diagonal. La observación del autor se refiere, más precisamente, a una propiedad de cada diagonal que desciende de izquierda a derecha: si se emparejan sus términos desde los extremos hacia el centro, las parejas suman siempre 128. Las primeras diagonales que parten de la zona inferior de la columna izquierda permiten verlo directamente:

Términos de la diagonal	Parejas enfrentadas
58, 70	$58 + 70 = 128$
52, 64, 76	$52 + 76 = 128$; centro 64
46, 58, 70, 82	$46 + 82 = 128$ y $58 + 70 = 128$

Se reconoce así la repetición de $58 + 70$ en una diagonal posterior. Las diagonales situadas al otro lado de la diagonal principal repiten los mismos valores por la simetría $a_{i,j} = a_{j,i}$ de la tabla.

Para demostrarlo, fijemos $k = j - i$, con $-10 \leq k \leq 10$. La diagonal correspondiente tiene $11 - |k|$ términos y, en el sentido descendente hacia la derecha, es

$$b_t = 4 + 6|k| + 12t, \quad 0 \leq t \leq 10 - |k|.$$

Su término enfrentado es $b_{10-|k|-t}$, por lo que

$$b_t + b_{10-|k|-t} = 128.$$

Si el número de términos es impar, el término central es 64: no constituye una pareja de casillas distintas, aunque satisface $64 + 64 = 128$. En índices de la tabla, la identidad dentro de la misma diagonal es

$$a_{i,j} + a_{10-j, 10-i} = 128.$$

Esta reflexión respecto de la antidiagonal central conserva $j - i$. Es distinta del emparejamiento por simetría central $a_{i,j} + a_{10-i, 10-j} = 128$, que en general relaciona dos diagonales simétricas y que también es válido.

Antidiagonales: repetición de un mismo valor. En una antidiagonal se mantiene constante $i + j = s$; por tanto,

$$a_{i,j} = 4 + 6s$$

es el mismo número en todas sus casillas. En particular, la antidiagonal central $i + j = 10$ está formada únicamente por valores 64. Esta es la distinción entre las diagonales con parejas complementarias y las antidiagonales de valor constante.

El número 34 resaltado. En la figura de la primera nota (apéndice B.1) aparece resaltado el número 34, junto a los valores 64. Es el punto medio entre 4 y 64. En general, los cinco números

$$n, \quad \frac{n^3 + n}{2}, \quad n^3, \quad \frac{3n^3 - n}{2}, \quad 2n^3 - n$$

están igualmente espaciados, con diferencia $(n^3 - n)/2$, y son simétricos respecto de n^3 . Para $n = 4$ son 4, 34, 64, 94, 124: el extremo 124 es el número del ejemplo, y $2 \cdot 64 - 124 = 4$ expresa esa simetría.

Comentario actual. El ejemplo es correcto, pero no proporciona por sí solo un criterio general de parada. La relación que lo explica es

$$n^3 - n = n(n-1)(n+1) \equiv 0 \pmod{6}.$$

El hecho de que la raíz esté en la progresión no determina en qué término aparece; ese es el problema que los procedimientos actuales completan.

A.3. La fórmula central de la corrección

La expresión recuperada de las notas, interpretando los corchetes como parte entera, es

$$n = n^3 - 12 \left\lfloor \frac{n^3}{12} \right\rfloor + m.$$

Usando $N = n^3$ y $r = N \bmod 12$, se convierte en $n = r + m$. Esta es la conexión directa entre la nota y la notación uniforme del artículo.

Los ejemplos de $n = 5$ y $n = 14$ quedan:

$$5 = 125 - 12 \cdot 10 + 0, \quad 14 = 2744 - 12 \cdot 228 + 6.$$

Para $n = 6$, la igualdad correcta es

$$6 = 216 - 12 \cdot 18 + 6.$$

Corrección editorial. Algunos ejemplos de las notas asignan +0 al caso $n = 6$, mientras que la tabla lo coloca correctamente en la columna $m = 6$. Aquí se presenta la igualdad corregida y se deja constancia de la discrepancia, sin atribuir la corrección al escrito de 2014.

A.4. Las columnas de nueve y tres valores

La siguiente tabla recompone las seis primeras columnas no negativas de las notas. Los huecos indican que no hay más valores en la columna, no que falten términos por calcular.

$m = 0$	$m = 6$	$m = 12$	$m = 18$	$m = 24$	$m = 30$
0	6	12	18	24	30
1	10	13	22	25	34
3	14	15	26	27	38
4		16		28	
5		17		29	
7		19		31	
8		20		32	
9		21		33	
11		23		35	

Al escribir $m = 6A$, se aprecia la alternancia observada: nueve valores cuando A es par y tres cuando es impar. Cada grupo es finito. Por ejemplo, la columna $m = 6$ contiene exactamente 6, 10, 14; no se prolonga indefinidamente manteniendo la misma corrección.

Aclaración actual sobre el borde. El entero $n = 2$ no aparece en las columnas no negativas porque

$$m = 2 - (8 \bmod 12) = -6.$$

Se trata de una columna adicional necesaria para que la clasificación incluya todas las raíces no negativas; no se ha insertado como si formara parte de la tabla histórica.

A.5. La organización por bloques decimales

Otra construcción recuperada de las notas utilizaba

$$n = n^3 - m + 6x$$

y la organización

Bloque de n	x	$6x$
0–9	0	0
10–19	1	6
20–29	2	12
30–39	3	18

En esta fórmula, la letra m no designa la corrección de las columnas anteriores. Para evitar mezclar ambos significados, llamamos μ a ese valor auxiliar en el comentario actual:

$$x = \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor, \quad \mu = n^3 - n + 6 \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor.$$

Los valores de los extremos de los bloques son:

Bloque de n	μ en el extremo inferior	μ en el extremo superior
0–9	0	720
10–19	996	6846
20–29	7992	24372
30–39	26988	59298

Los extremos no significan que se obtengan todos los enteros intermedios. Esta parte se conserva por su interés documental y por mostrar la atención que ya se prestaba a los bloques decimales; la nota no permite afirmar que contuviera el algoritmo actual para localizar la raíz.

A.6. Separación entre el origen y la elaboración posterior

El material conservado documenta el ejemplo de 64, las progresiones de paso seis, la fórmula de corrección módulo 12, las columnas de nueve y tres valores y la organización decimal. La lectura actual permite explicar esas estructuras y precisar sus límites.

La selección efectiva de la corrección mediante una búsqueda, las demostraciones de unicidad para cualquier número de cifras, los filtros módulo 16 y 48 y las reconstrucciones modulares optimizadas pertenecen a la elaboración de 2026. Conservar esta separación permite reconocer el origen de la idea sin atribuir a la nota de 2014 resultados que no estaban documentados en ella.

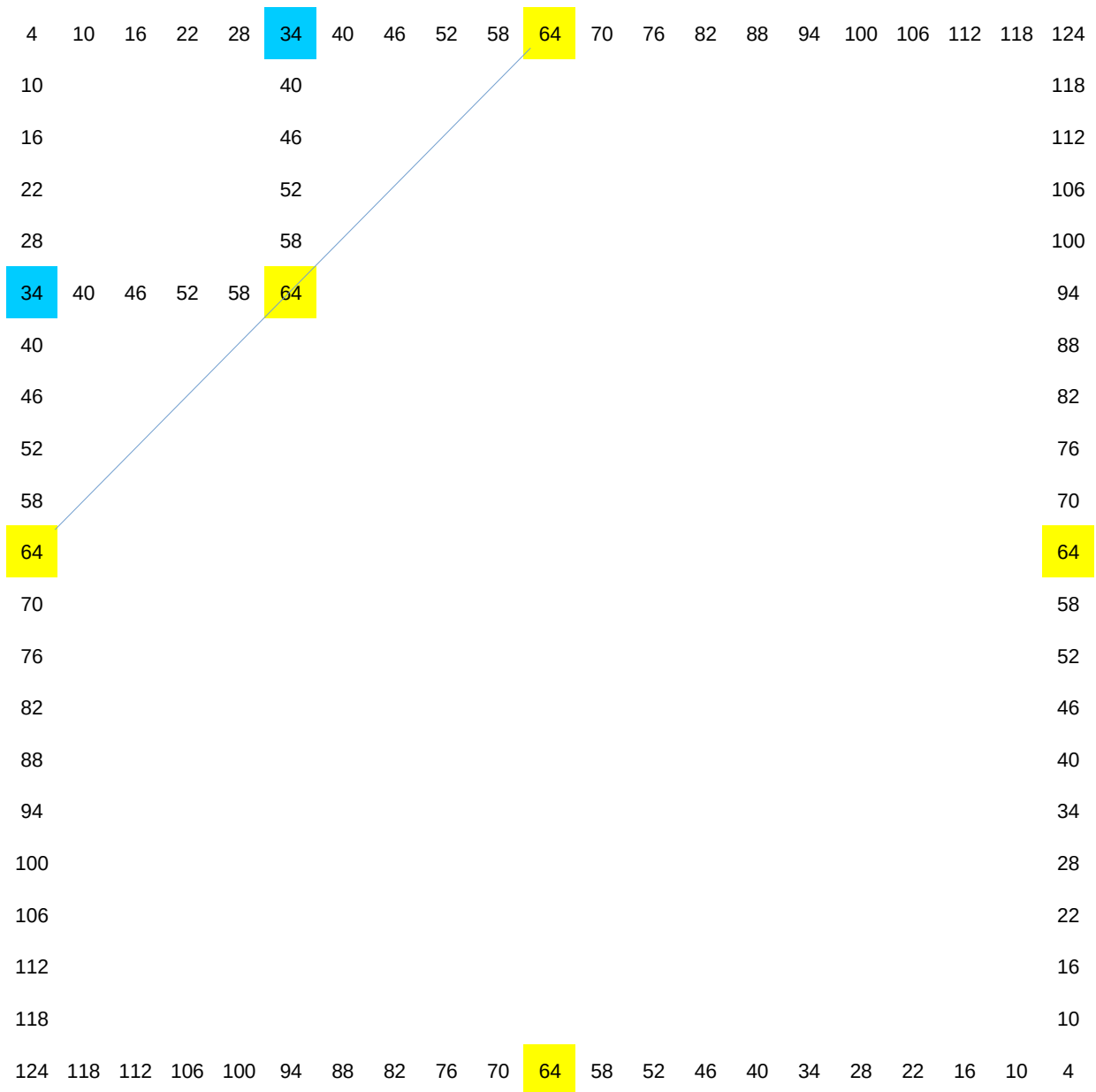
B. Imágenes originales de las notas

Este apéndice se destina a la reproducción de las imágenes originales, como testimonio documental del origen de la idea. No se deben confundir estas reproducciones con las tablas recompuestas del apéndice A. Se conservan los trazos, las anotaciones y las posibles erratas de las páginas; las aclaraciones y correcciones editoriales quedan fuera de las imágenes.

La fecha de 2014 corresponde a la primera nota. A la segunda no se le asigna aquí una fecha independiente.

B.1. Primera nota

Las páginas siguientes se incorporan desde el archivo original, sin transcribir ni corregir su contenido.



La raíz cúbica de m es igual a sumarle 6 las veces necesarias hasta llegar a un número que sea menor que 2m y entonces 2m menos ese número es el resultado.

Ejemplo: $64 + (6 \cdot 10) = 124$. $(2 \cdot 64) - 124 = 4$

4	10	16	22	28	34	40	46	52	58	64
10	16	22	28	34	40	46	52	58	64	70
16	22	28	34	40	46	52	58	64	70	76
22	28	34	40	46	52	58	64	70	76	82
28	34	40	46	52	58	64	70	76	82	88
34	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94
40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100
46	52	58	64	70	76	82	88	94	100	106
52	58	64	70	76	82	88	94	100	106	112
58	64	70	76	82	88	94	100	106	112	118
64	70	76	82	88	94	100	106	112	118	124

$$4 + 124 = 128$$

$$64 + 64 = 128$$

										64										
									58	64	70									
								52	58	64	70	76								
							46	52	58	64	70	76	82							
						40	46	52	58	64	70	76	82	88						
					34	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94					
				28	34	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100				
			22	28	34	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100	106			
		16	22	28	34	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100	106	112		
	10	16	22	28	34	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100	106	112	118	
4	10	16	22	28	34	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100	106	112	118	124
	10	16	22	28	34	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100	106	112	118	
		16	22	28	34	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100	106	112		
			22	28	34	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100	106			
				28	34	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100				
					34	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94					
						40	46	52	58	64	70	76	82	88						
							46	52	58	64	70	76	82							
								52	58	64	70	76								
									58	64	70									
										64										

$n = n^3 - 12 \left\lfloor \frac{n^3}{12} \right\rfloor + m$			Ejemplos: $5 = 125 - 12 \left\lfloor \frac{125}{12} \right\rfloor + 0$												$6 = 216 - 12 \left\lfloor \frac{216}{12} \right\rfloor + 0$												$14 = 2744 - 12 \left\lfloor \frac{2744}{12} \right\rfloor + 6$											
m	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150	156	162	168	174	180	186	192	198	204	...		
n	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150	156	162	168	174	180	186	192	198	204	...		
	1	10	13	22	25	34	37	46	49	58	61	70	73	82	85	94	97	106	109	118	121	130	133	142	145	154	157	166	169	178	181	190	193	202	205	...		
	3	14	15	26	27	38	39	50	51	62	63	74	75	86	87	98	99	110	111	122	123	134	135	146	147	158	159	170	171	182	183	194	195	206	207	...		
	4		16		28		40		52		64		76		88		100		112		124		136		148		160		172		184		196		208			
	5		17		29		41		53		65		77		89		101		113		125		137		149		161		173		185		197		209			
	7		19		31		43		55		67		79		91		103		115		127		139		151		163		175		187		199		211			
	8		20		32		44		56		68		80		92		104		116		128		140		152		164		176		188		200		212			
	9		21		33		45		57		69		81		93		105		117		129		141		153		165		177		189		201		213			
	11		23		35		47		59		71		83		95		107		119		131		143		155		167		179		191		203		215			
A	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...	En las columnas A par hay 9 valores de n y en las columnas A impar hay 3 valores de n.																				

			m		n		6x
n=n ³ -m+6x	x	6x	0	720	0-9	0	
	0	0	996	6846	10-19	6	
	1	6	7992	24372	20-29	12	
	2	12	26988	59298	30-39	18	
	3	18			40-49	24	
	4	24			50-59	30	
	5	30			60-69	36	
	6	36			70-79	42	
	...	...			80-89	48	

B.2. Segunda nota: Intentos para calcular n , conociendo n^3

Se reproducen íntegramente sus cinco páginas, sin corregir el contenido. El párrafo final de la última página es un comentario posterior a la nota y no forma parte del escrito original. La numeración de las notas indica su orden de presentación, no su fecha.

Intentos para calcular n , conociendo n^3

Para los valores de $n = 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, \dots$ es válida la fórmula: $n = n^3 - [12[(n^3/12)]]$

$$n = n^3 - 12 \left\lfloor \frac{n^3}{12} \right\rfloor$$

27,15,3 27:12=2,25	2x12=24	27-24=3	
64,52,40,28,16,4 64:12=5,333	5x12=60	64-60=4	
125,113,101,89,77,65,53,41,29,17,5. 125:12=10,416	10x12=120	125-120=5	
343,331,319,307, . . . 55,43,31,19,7. 343:12=28,583	28x12=336	343-336=7	
512,500,488,476, . . . 32,20,8. 512:12=42,666	42x12=504	512-504=8	
729, . . . 729:12=60,75	60x12=720	729-720=9	
1331, . . . 1331:12=110,916	110x12=1320	1331-1320=11	

Para los valores de $n = 6, 10, 14, \dots$ $n = n^3 - [12[(n^3/12)]] + 6$

$$n = n^3 - 12 \left\lfloor \frac{n^3}{12} \right\rfloor + 6$$

216,204,192, . . . 48,36,24,12,6. 216:12=18	18x12=216	216-216=0	0+6=6
1000, . . . 1000:12=83,333	83x12=996	1000-996=4	4+6=10
2744, . . . 2744:12=228,666	228x12=2736	2744-2736=8	8+6=14

Para los valores de $n = 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 23, \dots$ $n = n^3 - [12[(n^3/12)]] + (2x6)$

$$n = n^3 - 12 \left\lfloor \frac{n^3}{12} \right\rfloor + 2 \times 6$$

1728, . . . 1728:12=144	144x12=1728	1728-1728=0	0+12=12
2197, . . . 2197:12=183,083	183x12=2196	2197-2196=1	1+12=13

3375, . . .				
3375:12=281,25	281x12=3372	3375-3372=3	3+12=15	
4096, . . .				
4096:12=341,333	341x12=4092	4096-4092=4	4+12=16	
4913, . . .				
4913:12=409,416	409x12=4908	4913-4908=5	5+12=17	
6859, . . .				
6859:12=571,583	571x12=6852	6859-6852=7	7+12=19	
8000, . . .				
8000:12=666,666	666x12=7992	8000-7992=8	8+12=20	
9261, . . .				
9261:12=771,75	771x12=9252	9261-9252=9	9+12=21	
12167, . . .				
12167:12=1013,916	1013x12=12156	12167-12156=11	11+12=23	

Para los valores de $n = 18, 22, 26, \dots$ $n=n^3-[12[(n^3/12)]]+(3 \times 6)$

$$n = n^3 - 12 \left\lfloor \frac{n^3}{12} \right\rfloor + 3 \times 6$$

5832, . . .				
5832:12=486	486x12=5832	5832-5832=0	0+6+12=18	
10648, . . .				
10648:12=887,333	887x12=10644	10648-10644=4	4+6+12=22	
17576, . . .				
17576:12=1464,666	1464x12=17568	17576-17568=8	8+6+12=26	

Para los valores de $n = 24, 25, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 35, \dots$ $n=n^3-[12[(n^3/12)]]+(4 \times 6)$

$$n = n^3 - 12 \left\lfloor \frac{n^3}{12} \right\rfloor + 4 \times 6$$

13824, . . .				
13824:12=1152	1152x12=13824	13824-13824=0	0+12+12=24	
15625, . . .				
15625:12=1302,083	1302x12=15624	15625-15624=1	1+12+12=25	
19683, . . .				
19683:12=1640,25	1640x12=19680	19683-19680=3	3+12+12=27	

21952, ... 21952:12=1829,333	1829x12=21948	21952-21948=4	4+12+12=28
24389, ... 24389:12=2032,416	2032x12=24384	24389-24384=5	5+12+12=29
29791, ... 29791:12=2482,583	2482x12=29784	29791-29784=7	7+12+12=31
32768, ... 32768:12=2730,666	2730x12=32760	32768-32760=8	8+12+12=32
35937, ... 35937:12=2994,75	2994x12=35928	35937-35928=9	9+12+12=33
42875, ... 42875:12=3572,916	3572x12=42864	42875-42864=11	11+12+12=35

Para los valores de $n = 30, 34, 38, \dots$ $n=n^3-[12[(n^3/12)]]+(5 \times 6)$

$$n = n^3 - 12 \left\lfloor \frac{n^3}{12} \right\rfloor + 5 \times 6$$

27000, ... 27000:12=2250	2250x12=27000	27000-27000=0	0+6+12+12=30
39304, ... 39304:12=3275,333	3275x12=39300	39304-39300=4	4+6+12+12=34
54872, ... 54872:12=4572,666	4572x12=54864	54872-54864=8	8+6+12+12=38

Para los valores de $n = 36, 37, 39, 40, 41, 43, 44, \dots$ $n=n^3-[12[(n^3/12)]]+(6 \times 6)$

$$n = n^3 - 12 \left\lfloor \frac{n^3}{12} \right\rfloor + 6 \times 6$$

46656, ... 46656:12=3888	3888x12=46656	46656-46656=0	0+12+12+12=36
50653, ... 50653:12=4221,083	4221x12=50652	50653-50652=1	1+12+12+12=37
59319, ... 59319:12=4943,25	4943x12=59316	59319-59316=3	3+12+12+12=39
64000, ... 64000:12=5333,333	5333x12=63996	64000-63996=4	4+12+12+12=40
68921, ... 68921:12=5743,416	5743x12=68916	68921-68916=5	5+12+12+12=41

79507, ...
79507:12=6625,583 6625x12=79500 79507-79500=7 7+12+12+12=43

85184, ...
85184:12=7098,666 7098x12=85176 85184-85176=8 8+12+12+12=44

Para los valores de n = 42, ... $n=n^3-[12[(n^3/12)]]+(7x6)$

74088, ...
74088:12=6174 6174x12=74088 74088-74088=0 0+6+12+12+12=42

Valores de n :

Fórmulas :

3,4,5,7,8,9,11, ...

$n=n^3-[12[(n^3/12)]]$

6,10,14, ...

$n=n^3-[12[(n^3/12)]]+6$

12,13,15,16,17,19,20,21,23, ...

$n=n^3-[12[(n^3/12)]]+(2x6)$

18,22,26, ...

$n=n^3-[12[(n^3/12)]]+(3x6)$

24,25,27,28,29,31,32,33,35, ...

$n=n^3-[12[(n^3/12)]]+(4x6)$

30,34,38, ...

$n=n^3-[12[(n^3/12)]]+(5x6)$

36,37,39,40,41, ...

$n=n^3-[12[(n^3/12)]]+(6x6)$

42,46,50, ...

$n=n^3-[12[(n^3/12)]]+(7x6)$

m	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150	156	162	168	174	180	186	192	198	204	...
---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

n	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150	156	162	168	174	180	186	192	198	204	...
	1	10	13	22	25	34	37	46	49	58	61	70	73	82	85	94	97	106	109	118	121	130	133	142	145	154	157	166	169	178	181	190	193	202	205	...
	3	14	15	26	27	38	39	50	51	62	63	74	75	86	87	98	99	110	111	122	123	134	135	146	147	158	159	170	171	182	183	194	195	206	207	...
	4		16		28		40		52		64		76		88		100		112		124		136		148		160		172		184		196		208	
	5		17		29		41		53		65		77		89		101		113		125		137		149		161		173		185		197		209	
	7		19		31		43		55		67		79		91		103		115		127		139		151		163		175		187		199		211	
	8		20		32		44		56		68		80		92		104		116		128		140		152		164		176		188		200		212	
	9		21		33		45		57		69		81		93		105		117		129		141		153		165		177		189		201		213	
	11		23		35		47		59		71		83		95		107		119		131		143		155		167		179		191		203		215	

A	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...	En las columnas A par hay 9 valores de n y en las columnas A impar hay 3 valores de n.																			
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	-----	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

La fórmula general :

$$n^3 - 12 \left\lfloor \frac{n^3}{12} \right\rfloor + m = n$$

		m	
3x1= 3	0	6x0=0	$n = n^3 - [12 \lfloor (n^3/12) \rfloor]$
3x2= 6	1	6x1=6	$n = n^3 - [12 \lfloor (n^3/12) \rfloor] + 6$
3x4= 12	2	6x2=12	$n = n^3 - [12 \lfloor (n^3/12) \rfloor] + 12$
3x6= 18	3	6x3=18	$n = n^3 - [12 \lfloor (n^3/12) \rfloor] + 18$
3x8= 24	4	6x4=24	$n = n^3 - [12 \lfloor (n^3/12) \rfloor] + 24$
3x10= 30	5	6x5=30	$n = n^3 - [12 \lfloor (n^3/12) \rfloor] + 30$
3x12= 36	6	6x6=36	$n = n^3 - [12 \lfloor (n^3/12) \rfloor] + 36$
3x14= 42	7	6x7=42	$n = n^3 - [12 \lfloor (n^3/12) \rfloor] + 42$
3x16= 48	8	6x8=48	$n = n^3 - [12 \lfloor (n^3/12) \rfloor] + 48$
3x18= 54	9	6x9=54	$n = n^3 - [12 \lfloor (n^3/12) \rfloor] + 54$
3x20= 60	10	6x10=60	$n = n^3 - [12 \lfloor (n^3/12) \rfloor] + 60$

Ejemplos:

$$5 = 125 - 12 \left\lfloor \frac{125}{12} \right\rfloor + 0 \quad 6 = 216 - 12 \left\lfloor \frac{216}{12} \right\rfloor + 0 \quad 14 = 2744 - 12 \left\lfloor \frac{2744}{12} \right\rfloor + 6$$

Esta nota documenta sistemáticamente los patrones de congruencia de n^3 módulo 12, mostrando que cada valor de n determina un residuo predecible. Sin embargo, el título puede resultar engañoso: la fórmula $n = (n^3 \bmod 12) + m$ no constituye un método práctico para calcular n a partir de n^3 , ya que el valor de m depende del orden de magnitud de n , creando una circularidad.